

PROBLEMA RESUELTO 2

Utilice la regla de L'Hopital para determinar los valores de a y b tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos bx}{x^2} = 3$$

Solución

Dado que cuando x tiende a 0, el denominador se aproxima a 0; para el límite exista, el numerador también se debe aproximar a 0 para que resulte la forma indeterminada

$\frac{0}{0}$ y se pueda usar la regla de L'Hopital; entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos bx) = 0$$

$$a - \cos(0) = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$a = 1$$

Aplicando la regla de L'Hopital para calcular el límite se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos bx}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x(1 - \cos bx)}{D_x(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \sin bx}{2x} \end{aligned}$$

Como el límite sigue teniendo la forma $\frac{0}{0}$ se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hopital, obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos bx}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x(b \sin bx)}{D_x(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^2 \cos bx}{2} \\ &= \frac{b^2 \cos(0)}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

Como este límite debe ser igual a 3, se obtiene que el valor de b es

$$\frac{b^2}{2} = 3$$

$$b^2 = 6$$

$$b = \sqrt{6}$$

De donde los valores buscados son $a = 1$ y $b = \sqrt{6}$
