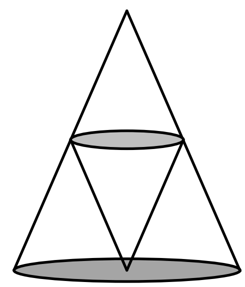
PROBLEMA RESUELTO 2

Un cono regular recto tiene una altura de 10 cm y radio de 3 cm. Dentro del cono se inscribe otro cono que está en forma invertida, es decir que el vértice del cono invertido descansa en el centro de la base del cono grande y ambas bases son paralelas. ¿Qué valores de r y h del cono hacen que el cono inscrito tenga volumen máximo.

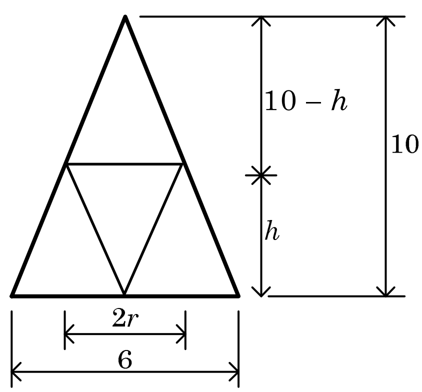
Solución

La siguiente figura ilustra la disposición de los conos descrita en el problema



El volumen del cono inscrito es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Utilizando semejanza de triángulos para expresar una variable en términos de otra se tiene



$$\frac{10}{6} = \frac{10-h}{2r}$$

$$20r = 60 - 6h$$

$$h = \frac{60-20r}{6}$$

$$h = \frac{10}{3}(3-r)$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{10}{3}(3-r)$$

$$= \frac{10}{9}\pi r^2 (3-r)$$

El dominio de esta función es el intervalo cerrado $[0,3]$ ya que el radio del cono inscrito no puede ser mayor que el radio del cono que lo contiene

Calculando la primera derivada e igualando a cero para obtener valores críticos

$$\begin{aligned} V'(r) &= D_r\left[\frac{10}{9}\pi r^2(3-r)\right] = D_r\left[\frac{10}{3}\pi r^2 - \frac{10}{9}\pi r^3\right] \\ &= \frac{20}{3}\pi r - \frac{10}{3}\pi r^2 \\ &= \frac{10}{3}\pi r(2-r) \end{aligned}$$

Los valores críticos son $r = 0$ y $r = 2$

Como el dominio de la función es un intervalo cerrado, se utilizará el teorema del valor extremo para encontrar el volumen máximo. Evaluando en los valores críticos y en los extremos del intervalo se tiene

$$V(0) = \frac{10}{9}\pi(0)^2(3-0) = 0$$

$$V(3) = \frac{10}{9}\pi(3)^2(3-3) = 0$$

$$V(2) = \frac{10}{9}\pi(2)^2(3-2) = \frac{40}{9}\pi$$

De donde el volumen máximo del cono es $\frac{40}{9}\pi$ cuando $r = 2$ y $h = \frac{10}{3}$