PROBLEMA RESUELTO 1

Encuentre los intervalos donde la función dada es creciente, intervalos donde es decreciente, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, encuentre los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y trace la gráfica.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

Solución

El primer paso es calcular la primera derivada y la segunda derivada.

$$f'(x) = D_x\left[3x^4 + 4x^3\right] = 12x^3 + 12x^2$$

$$f''(x) = D_x\left[12x^3 + 12x^2\right] = 36x^2 + 24x$$

Ahora hay que encontrar los valores críticos, para ello se iguala a cero la primera y la segunda derivada y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$f'(x) = 0$$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x+1) = 0$$

Igualando a cero cada uno de los factores se tiene

$$12x^2 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$

$$x^2 = 0 \qquad\qquad x = -1$$

$$x = 0$$

De donde los números críticos de la primera derivada son $x = 0$ y $x = -1$

Al hacer lo mismo para la segunda derivada se tiene

$$36x^2 + 24x = 0$$

$$12x(3x+2) = 0$$

Si $12x = 0$ entonces, $x = 0$ si $3x + 2 = 0$ entonces $x = -\frac{2}{3}$

Con los números críticos de la primera y segunda derivada se construyen los intervalos del dominio de la función, en los cuales hay que realizar el análisis, estos intervalos son

$$(-\infty, -1), \quad (-1, -\frac{2}{3}), \quad (-\frac{2}{3}, 0), \quad (0, \infty)$$

Observe que los intervalos se han construido de tal forma que los números críticos están ordenados de menor a mayor en la recta numérica para que ningún intervalo se traslape con otro.

Una vez construidos los intervalos se procede a analizar el comportamiento de la función en cada uno de ellos, para ello lo más conveniente es colocar la información en una tabla, como la que se muestra a continuación.

tervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	*	-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = -1$	-1	0	+	Mínimo relativo
$\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$	*	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = -\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	+	0	Punto de inflexión
$(-\frac{2}{3}, 0)$	*	+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	0	Punto de inflexión
$(0, \infty)$	*	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

Para que quede claro como se completa la tabla se explica paso a paso como se obtienen los resultados de la primera fila, las demás filas se completan de forma similar

Se elige arbitrariamente un valor de prueba en el intervalo $(-\infty, -1)$, esto es cualquier valor que esté dentro del intervalo, se utilizará $x = -2$. Este número se evalúa en la primera derivada, el signo del resultado nos indicará si la función es creciente o decreciente en ese intervalo.

$$f'(-2) = 12(-2)^3 + 12(-2)^2 = 12(-8) + 12(4) = -96 + 48 = -48$$

Como la primera derivada es negativa, se anota el signo menos en la columna de la primera derivada y se concluye que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Ahora se evalúa el mismo valor de prueba en la segunda derivada, para saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo

$$f''(-2) = 36(-2)^2 + 24(-2) = 36(4) - 48 = 144 - 48 = 96$$

Como la segunda derivada es positiva, se anota el signo más y se concluye que la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Este proceso se repite para cada intervalo hasta completar todos los intervalos. La tabla completa es la mostrada anteriormente.

Al terminar de llenar la tabla para los intervalos se procede a analizar lo que ocurre en los números críticos. Se analizará el primer valor crítico $x = -1$. Primero se evalúa en la función para obtener el valor de y.

$$f(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 = 3(1) + 4(-1) = 3 - 4 = -1$$

El valor obtenido se anota en la tabla ya que corresponde a un punto de la gráfica. Al evaluar $x = -1$ en la primera derivada se obtiene como resultado 0, lo que nos confirma que $x = -1$ es un valor crítico.

Usando el criterio de la primera derivada se tiene que en el intervalo anterior a $x = -1$ la función es decreciente y en el intervalo posterior a $x = -1$ la función es creciente, concluyendo que en $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo; y el valor mínimo es -1.

En éste caso también se puede usar el criterio de segunda derivada para concluir el resultado anterior. Como al evaluar $x = -1$ en la segunda derivada se obtiene un resultado positivo, por lo que, la función es cóncava hacia arriba en $x = -1$ y la función tiene un mínimo relativo en ese valor crítico.

Siguiendo el mismo procedimiento se analizan los otros valores críticos. Al completar la tabla se procede a dibujar su representación gráfica.

Para dibujar la gráfica comience por dibujar los puntos correspondientes a los valores críticos, estos son $(-1,-1)$, $\left(-\frac{2}{3},-\frac{16}{27}\right)$ y $(0,0)$. Una vez graficados los puntos proceda a dibujar las partes de la curva que corresponden a cada uno de los intervalos indicados en la tabla. La representación gráfica de la función queda como se muestra en la figura es la siguiente