PROBLEMA RESUELTO 1

Determine si la función satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de c que satisfacen el teorema. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

$$f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2; \qquad [1, 8]$$

Solución

a. La primera condición establece que la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[1, 8]$. La función que se está estudiando contiene raíces cúbicas y sumas, como la raíz cúbica es continua en todos los números reales, se tiene que la función si es continua en el intervalo $[1, 8]$

b. La segunda condición establece que la función debe ser derivable en el intervalo abierto $(1,8)$. Calculando la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2\right) \\ &= \frac{2}{3}x^{-1/3} - x^{-2/3} \\ &= \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \frac{2x^{1/3} - 3}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

La derivada no está definida únicamente para $x = 0$. Por lo tanto, si es derivable en el intervalo abierto $(1,8)$

c. La tercera condición establece que $f(1) = f(8) = 0$. Evaluando la función en los extremos del intervalo

$$f(1) = (1)^{2/3} - 3(1)^{1/3} + 2 = 1 - 3 + 3 = 0$$
$$f(8) = (8)^{2/3} - 3(8)^{1/3} + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

Como se satisfacen las tres condiciones, el teorema garantiza que existe al menos un número c en el intervalo $(1,8)$, tal que $f'(c) = 0$, es decir

$$f'(c) = \frac{2c^{1/3} - 3}{3c^{2/3}} = 0$$

Despejando el valor de c

$$\begin{aligned} 2c^{1/3} - 3 &= 0 \\ 2c^{1/3} &= 3 \\ c^{1/3} &= \frac{3}{2} \\ c &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ c &= \frac{27}{8} = 3.375 \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[1,8]$