PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

Solución

Al calcular el límite den numerador y del denominador se tiene

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x - \cos x - \operatorname{sen} x\right) = e^0 - \cos(0) - \operatorname{sen}(0) = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} x\right) = (0)\operatorname{sen}(0) = 0$$

Como el límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ se puede utilizar la regla de L'hopital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{D_x\left(e^x - \cos x - \operatorname{sen} x\right)}{D_x\left(x \operatorname{sen} x\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \operatorname{sen} x - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\end{aligned}$$

Evaluando el límite anterior se obtiene que el límite del numerador es 0 y que el límite del denominador es 0, es decir que nuevamente se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Al aplicar de nuevo la regla de L'Hopital se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{D_x\left(e^x + \operatorname{sen} x - \cos x\right)}{D_x\left(x\cos x + \operatorname{sen} x\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \cos x + \operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \cos x + \operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + 2\cos x}\end{aligned}$$

Al evaluar el límite en la última expresión se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x} &= \frac{e^0 + 1 + 0}{0 + 2(1)}\\ &= 1\end{aligned}$$