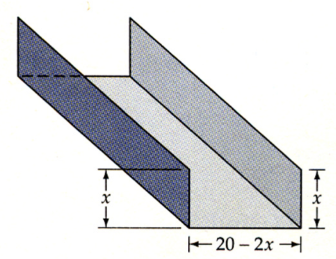
PROBLEMA RESUELTO 1

Una lámina metálica de 20 pulgadas de ancho y 12 pies de largo será utilizada para construir un canal rectangular de 12 pies de largo, como se muestra en la figura. Determine el valor de x de tal forma que el canal tenga una capacidad máxima.



Solución

El canal tendrá una capacidad máxima cuando el área de la sección transversal sea máxima, es decir cuando el área del rectángulo que tiene como base $20-2x$ y altura x alcance su valor máximo.

El área del rectángulo es

$$A = \text{base} \times \text{Altura} = (20-2x)(x)$$

$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

El dominio de esta función está determinado por todos los valores que puede tomar x en el contexto del problema, dado que el ancho de la lámina es de 20 pulgadas, el valor de x debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a 10, pues se doblan hacia arriba dos lados de largo x. Observe también que, cualquier otro valor de x al evaluarlo en la función da como resultado un área negativa, lo cual no es posible ya que se trata del área de un rectángulo. Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo $\left[0,10\right]$.

Derivando la función

$$A'(x) = D_x\left(-2x^2 + 20x\right) = -4x + 20$$

Igualando a cero para obtener los valores críticos

$$-4x + 20 = 0$$

$$-4x = -20$$

$$x = 5$$

Como el dominio de la función es un intervalo cerrado, se utilizará el teorema del valor extremo para establecer el valor máximo de la función en ese intervalo. Evaluando la función en los extremos del intervalo y en los valores críticos, para obtener el área máxima en el intervalo cerrado

$$A(0) = -2(0)^2 + 20(0) = 0$$

$$A(5) = -2(5)^2 + 20(5) = 50$$

$$A(10) = -2(10)^2 + 20(10) = 0$$

Por lo tanto, el área del canal es máxima cuando su altura x es de 5 pulgadas y la base es de 10 pulgadas.