

PROBLEMA RESUELTO 1

- a. Encuentre una linealización de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 8$.
- b. Dibuje la gráfica de la función f y la de su linealización $L(x)$.
- c. Utilice el modelo lineal para aproximar el valor de $\sqrt[3]{9}$
- d. Utilice diferenciales para aproximar $\sqrt[3]{9}$

Solución

- a. La linealización de una función en $x = a$ está dada por

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Calculando la derivada de la función y evaluando en $a = 8$

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(x^{1/3}) \\ &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Evaluando la función y la derivada en $a = 8$

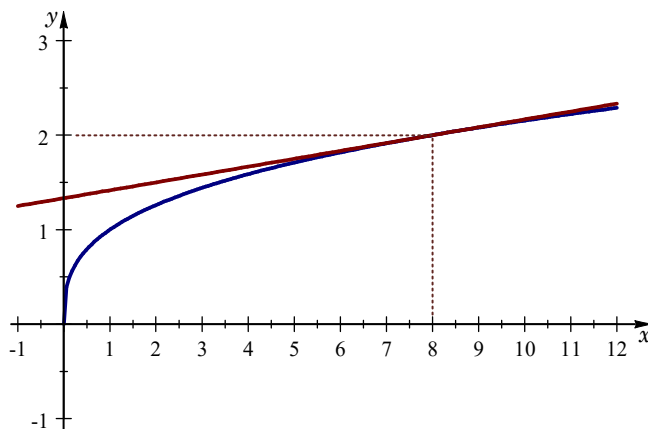
$$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

Entonces el modelo lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8) \\ &= \frac{1}{12}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- b. La gráfica de la función y el modelo lineal se muestran en la siguiente figura



- c. Para aproximar $\sqrt[3]{9}$ utilizando el modelo obtenido, solo debemos evaluar en la función lineal

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$$

$$\sqrt[3]{9} \approx \frac{1}{12}(9) + \frac{4}{3} = 2.083$$

Como se puede comprobar, este resultado es correcto con dos cifras decimales.

- d. Utilizando diferenciales se tiene

$$dy = f'(x)dx$$

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Ahora bien, el diferencial se puede utilizar para aproximar $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, cuando Δx es pequeño.

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Tomando $x = 8$, $\Delta x = 1$

$$f(8 + 1) \approx f(8) + f'(8)(1)$$

$$f(9) \approx f(8) + f'(8)(1)$$

Como $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\sqrt[3]{9} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \cdot (1) = 2 + \frac{1}{12}$$

$$\approx 2.083$$
