

PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral indefinida

$$\int x(8 - 3x^2)^{1/3} dx$$

Solución

Observe que la función compuesta es la siguiente

$$f(g(x)) = (8 - 3x^2)^{1/3}$$

Donde $g(x) = 8 - 3x^2$ y $f(u) = u^{1/3}$

Entonces la sustitución apropiada para calcular esta integral es

$$u = 8 - 3x^2$$

Calculando el diferencial

$$du = -6x dx$$

Ahora hay que expresar la variable x del problema original en términos de la variable temporal u . Observe que en la integral dada aparece el factor $x dx$, el cual se puede obtener en términos de la variable u al pasar a dividir -6 en el diferencial, es decir

$$\frac{du}{-6} = x dx$$

La integral dada puede expresarse como

$$\begin{aligned} \int x(8 - 3x^2)^{1/3} dx &= \int u^{1/3} \left(-\frac{du}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{6} \int u^{1/3} du \end{aligned}$$

La última integral se puede calcular utilizando la fórmula de integración de una potencia

$$\begin{aligned} \int x(8 - 3x^2)^{1/3} dx &= -\frac{1}{6} \int u^{1/3} du \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} \right) + c \\ &= -\frac{3}{24} u^{4/3} + c \\ &= -\frac{1}{8} u^{4/3} + c \end{aligned}$$

Finalmente hay que expresar la respuesta en términos de la variable x

$$\int x(8 - 3x^2)^{1/3} dx = -\frac{1}{8} (8 - 3x^2)^{4/3} + c$$
