UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-4-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**8 de mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Renato Ponciano**

Examen final

Temario A

Tema 1: (30 puntos)

a. Calcule la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 17}$

b. Determine el valor de k, de tal forma que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{kx^2 - 1} + x}{3 - x} = -3$

c. Encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Tema 2: (20 puntos)

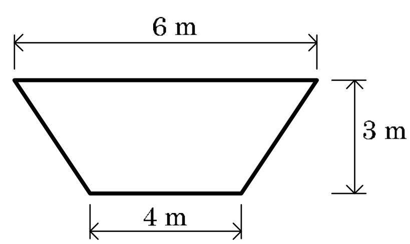
Un cubo de hielo de 20 cm por lado se derrite de tal forma que sus lados disminuyen a razón de 0.5 cm por hora. El agua que resulta al derretirse el cubo de hielo fluye a un depósito en forma de cono circular recto de 15 cm de radio y 40 cm de altura.

a. Encuentre la razón a la cual disminuye el volumen del cubo de hielo cuando el lado del cubo es de 15 cm.

b. Encuentre la razón a la cual aumenta la altura de agua en el cono cuando el lado del cubo es de 15 cm.

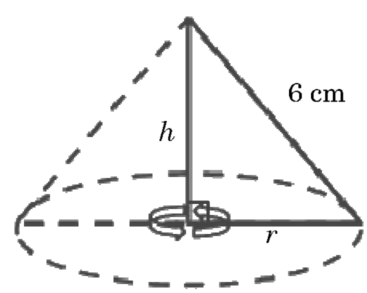
Tema 3: (20 puntos)

Una pileta llena de agua tiene una longitud de 10 metros y su sección transversal es un trapecio isósceles, como se muestra en la figura. Si la base inferior de la pileta se encuentra sobre el suelo. Calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua a una altura de 2 m por encima de la pileta.



Tema 4: (20 puntos)

Suponga que un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 6 centímetros y uno de sus catetos está en posición horizontal. El triángulo se hace girar tomando como eje de rotación el cateto vertical, de manera que se genera un sólido en forma de cono circular recto (ver figura).



a. Exprese el volumen del cono en términos de h.

b. Determine las dimensiones de los catetos que generan el cono de mayor volumen.

Tema 5: (10 puntos)

Utilice el método de Newton para encontrar el punto de intersección de la recta $y = 2x$ con la curva $y = \cos 2x$. Obtenga su respuesta con 3 decimales exactos.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN
TEMARIO A

Tema 1: (20 puntos)

Un depósito en forma de cono circular recto, con su vértice hacia arriba y su base sobre el suelo tiene un radio de 2 metros y una altura de 4 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta una altura de 6 metros sobre el nivel del suelo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se manipula la integral para poder aplicar un producto notable.	$\int \frac{dx}{x^2+8x+17} =$ $\int \frac{dx}{x^2+8x+16+1} =$ $\int \frac{dx}{(x+4)^2+1}$
2.	Se realiza una sustitución para facilitar la resolución de la integral. Después de la sustitución la integral se convierte en una integral conocida.	$u = x+4$ $du = dx$ $\int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u + c$ $\int \frac{dx}{x^2+8x+17} =$ $\tan^{-1}(x+4) + c$

R./

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+17} = \tan^{-1}(x+4) + c$$

b. Determine el valor de k, de tal forma que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{kx^2-1}+x}{3-x} = -3$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se multiplica y divide el limite por $\frac{1}{x}$.	$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{kx^2-1}+x}{3-x} * \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{kx^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{x}{x}}$
2.	Se simplifica el límite y luego se valúa el resultado. Luego se resuelve la actuación resultante para encontrar el valor de k.	$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{k-\frac{1}{x^2}}+1}{\frac{3}{x}-1} =$ $\frac{\sqrt{k-0}+1}{0-1} = \frac{\sqrt{k}+1}{-1} = -3$ $\sqrt{k}+1 = 3 => k = 4$
R./	$k = 4$	

c. Encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se encuentra la derivada de la función para poder sustituir en la fórmula de longitud de arco. Se deriva utilizando la regla de la cadena.	$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

2.	La integral se resuelve fácilmente utilizando identidades trigonométricas.	$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{1+\cot^2 x}\, dx =$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \csc x\, dx =$ $= \ln\lvert\cot x - \csc x\rvert \begin{matrix} 3\pi/4 \\ \pi/4 \end{matrix}$

R./

$$L = 1.763u$$

Tema 2: (20 puntos)

Un cubo de hielo de 20 cm por lado se derrite de tal forma que sus lados disminuyen a razón de 0.5 cm por hora. El agua que resulta al derretirse el cubo de hielo fluye a un depósito en forma de cono circular recto de 15 cm de radio y 40 cm de altura.

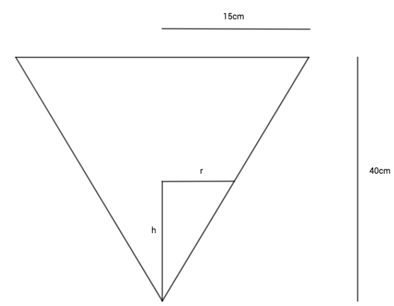
a. Encuentre la razón a la cual disminuye el volumen del cubo de hielo cuando el lado del cubo es de 15 cm.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe encontrar la razon de cambio del volumen del cubo, que es la derivada implicita de la funcion de volumen del cubo.	$V = L^3 => \frac{dV}{dt} = 3L^2\frac{dL}{dt}$
2.	Luego se sustituyen los valores en la derivada encontrada anteriormente.	$\frac{dL}{dt} = -0.5\ cm/h$ $\frac{dV}{dt}\vert_{L\ =\ 15} = 3(15)^2(0.5)$ $= -337.5\ cm^3/h$

R./

$$\frac{dV}{dt}\vert_{L\ =\ 15} = -337.5\ cm^3/h$$

b. Encuentre la razón a la cual aumenta la altura de agua en el cono cuando el lado del cubo es de 15 cm.

No.	Explicación	Operatoria
1.	El volumen del cono crece a la misma razón que el volumen del cubo disminuye. A la ves el volumen del cono es igual al volumen perdido por el cubo.	$\frac{dV_{cono}}{dt} = -\frac{dV_{cubo}}{dt} = 337.5\ cm^3/h$ $V_{cono} = V_{i_{cubo}} - V_{f_{cubo}} = 20^3 - 15^3$ $= 4625cm^3$
2.	La ecuación de volumen del cono debe estar en términos de solo una variable para poder derivarla. Esto se logra por medio de triángulos semejantes.	 $V_{cono}(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\frac{15}{r} = \frac{40}{h} => r = \frac{3h}{8}$ $V_{cono}(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3h}{8}\right)^2 h = \frac{3\pi}{64}h^3$
3.	Luego se debe calcular la altura en el momento que el volumen es igual a $4625cm^3$.	$4625 = \frac{3\pi}{64}h^3 => h = 31.55cm$

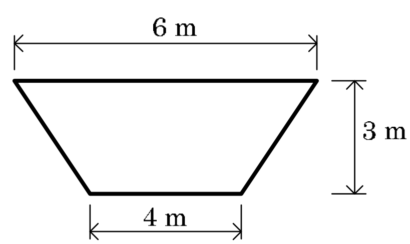
4.	Se encuentra la razón de cambio del volumen del cono en función de la altura. Luego se despeja la razón de cambio de la altura respecto al tiempo.	$\frac{dV_{cono}(h)}{dt} = \frac{9\pi}{64}h^2\frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{64}{9\pi h^2} * \frac{dV_{cono}(h)}{dt}$
5.	Se sustituyen los valores para encontrar la solución.	$\frac{dh}{dt} = \frac{64}{9\pi(31.55)^2} * 337.5 = 0.767cm/h$

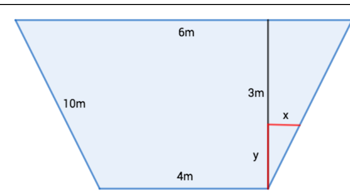
R./

$$\frac{dh}{dt} = 0.767cm/h$$

Tema 3: (20 puntos)

Una pileta llena de agua tiene una longitud de 10 metros y su sección transversal es un trapecio isósceles, como se muestra en la figura. Si la base inferior de la pileta se encuentra sobre el suelo. Calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua a una altura de 2 m por encima de la pileta.



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero debemos calcular el diferencial de volumen dV. Para ello debemos encontrar la funcion que describe los lados del trapecio utilizando triangulos semejantes.	 $\frac{3}{y} = \frac{1}{x} => x = \frac{y}{3}$
2.	El diferencial de volumen esta dado por el area del rectangulo por un diferencial de altura dy.	$dV = (10)(4 + 2x)dy = \left(40 + \frac{20}{3}y\right)dy$

3.	La altura que se debe bombear el agua es la diferencia entre 5 metros por encime de la pileta y donde se encuentra el agua.	$h = 5 - y$
4.	El diferencial de trabajo esta dado por la multiplicacion de el peso especifico del agua por la altura por el diferencial de volumen.	$dW = \gamma * h * dV$ $dW = 9800(5-y)\left(40 + \frac{20}{3}y\right)dy$
5.	Se integra cada lado de la ecuacion y se resuelve.	$\int_0^W dW = 9800\int_0^3 (5-y)\left(40+\frac{20}{3}y\right)dy$ $W = 9800\int_0^3\left(200 - \frac{20}{3}y - \frac{20}{3}y^2\right)dy$ $W = 9800\left[200y - \frac{20}{6}y^2 - \frac{20}{9}y^3\right]_0^3$ $W = 9800\left[200*3 - \frac{20}{6}*3^2 - \frac{20}{9}*3^3\right]$ $W = 4998000J$

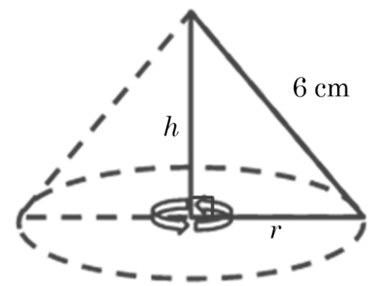
R./

$$W = 4998000J$$

Tema 4: (20 puntos)

Suponga que un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 6 centímetros y uno de sus catetos está en posición horizontal. El triángulo se hace girar tomando como eje de rotación el cateto vertical, de manera que se genera un sólido en forma de cono circular recto (ver figura).

a. Exprese el volumen del cono en términos de h.



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	La ecuacion a optimizar es el volumen del cono. Como esta es una ecuacion de dos variables, se debe poner una varible en funcion de la otra.	$V_c(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2.	El radio y la altura se pueden relacionar utilizando pitagoras.	$r^2 + h^2 = 6^2$
3.	Despejando r de la ecuacion anterior y sustituyendo en la ecuacion de volumen.	$r = \sqrt{36 - h^2}$ $V_c(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{36-h^2}\right)^2 h$ $V_c(h) = \frac{1}{3}\pi(36-h^2)h$ $V_c(h) = \frac{1}{3}\pi(36h - h^3)$

R./

$$V_c(h) = \frac{1}{3}\pi(36h - h^3)$$

b. Determine las dimensiones de los catetos que generan el cono de mayor volumen.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se deben encontrar los puntos criticos de la funcion utilizando la primera derivada.	$\frac{dV_c(h)}{dh} = 0$ $\frac{dV_c(h)}{dh} = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2)$ $\frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0$ $h = 2\sqrt{3}$
2.	Se utiliza el criterio de la segunda derivada para ver si el punto es un maximo o un minimo.	$\frac{d^2V_c(h)}{dh^2} = \frac{\pi}{3}(-6h)$ $\frac{d^2V_c(2\sqrt{3})}{dh^2} = \frac{\pi}{3}(-6 * 2\sqrt{3})$ $\frac{d^2V_c(2\sqrt{3})}{dh^2} = -21.76$
3.	Como el resultado es negativo, el punto es un maximo en la funcion de volumen. Luego se encuentra el radio utilizando la ecuacion encontrada anteriormente.	$r = \sqrt{36 - h^2}$ $r = \sqrt{36 - \left(2\sqrt{3}\right)^2}$ $r = 2\sqrt{6}$

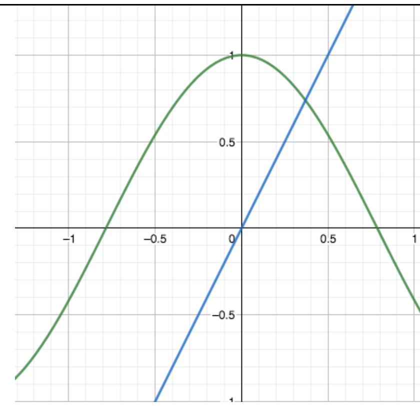
R./

$$r = 2\sqrt{6} \qquad h = 2\sqrt{3}$$

Tema 5: (10 puntos)

Utilice el método de Newton para encontrar el punto de intersección de la recta $y = 2x$ con la curva $y = \cos 2x$. Obtenga su respuesta con 3 decimales exactos.

No.	Explicación	Operación
1.	El punto de interseccion entre las dos rectas es el que resuelve la siguiente ecuacion. Esta ecuacion se manipula para obtener la funcion a la que se le aplicara el metodo.	$\cos 2x = 2x$ $0 = \cos 2x - 2x$ $f(x) = \cos 2x - 2x$

2.	Se deriva la funcion.	$f(x) = \cos 2x - 2x$ $f'(x) = -2\sin 2x - 2$
3.	Observando la grafica se escoge x=0.5 como primera aproximacion.	 $x_0 = 0.5$
4.	Se sustituyen los valores en la formula y se hacen varias iteraciones.	$x_n = x_{n+1} + \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $x_1 = 0.5 + \dfrac{\cos 1 - 1}{-\sin 1 - 2} = 0.3382$

N	Xn	Xn+1
0	0.5	0.3382
1	0.3382	0.3776
2	0.3776	0.3675
3	0.3675	0.3700
4	0.3700	0.3694
5	0.3694	0.3695

R./

$$x = 0.3695$$