UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-4-M-1-00-2016

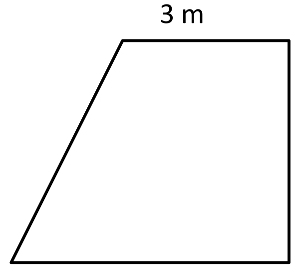
CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**9 de mayo de 2016**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Fabelio Ajtun**
REVISO EL EXAMEN:	**Inga. Helen Ramirez**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS **PRIMER SEMESTRE 2016**

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA 09052016

MATEMATICA BASICA 2	**EXAMEN FINAL**

Tema No.		PUNTOS/100
1	Resuelva lo indicado: a) $\int_0^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}\,dx$ b) $\lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{\frac{2}{x}}$	20
2	Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $xy^3 - x^5y^2 = 4$ en el punto (1,2).	10
3	Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine $a\,,b$ de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto (1,2) .	10
4	Sea R la región acotada por las gráficas de $y = e^x$ y $y = 2^x$ y la recta $x = 2.$ a) Obtenga el área de la región R. b) ***Plantee*** una integral para calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje $\boldsymbol{Y}$ por el método de Capas Cilíndricas. (**NO LA RESUELVA**)	20
5	Calcule el trabajo necesario para bombear todo el líquido en el tanque lleno de 10 metros de largo cuya sección transversal se muestra en la figura, hacia un punto que está 1 metros arriba de la parte superior del tanque. (Densidad del líquido 800 kg/m^3)  	20
6	Para construir un envase cerrado en forma de cilindro circular recto que tenga un volumen de 27 plg^3, la tapa y la base se cortarán de trozos cuadrados de hojalata. Estime el radio del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su construcción, Incluya la hojalata que se desperdicia al obtener la tapa y la base y después determine la altura que debe tener el envase.	20

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 pts.)
Resuelva lo indicado:

a) $\int_0^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}\ dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizando una sustitución, se introduce una nueva variable para simplificar la integral.	$u = x + 4$
2.	Derivando ambos lados de la igualdad anterior.	$du = dx + 0$
3.	Se despeja la variable x, para sustituirla en la integral original.	$x = u - 4$
4.	Sustituyendo los valores anteriores en la integral original.	$\int_0^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}} dx = \int_0^5 \frac{2(u-4)+1}{\sqrt{u}} du$
5.	Operando las expresiones de la integral.	$\int_0^5 \frac{2u-7}{\sqrt{u}}$
6.	Simplificando los términos de la integral.	$2\int_0^5 u^{1/2} dx - 7\int_0^5 u^{-1/2}$
7.	Integrando y regresando a la variable original.	$\left[\frac{4}{3}(x+4)^{3/2} - 14(x+4)^{1/2}\right]\Big\|_0^5$
8.	Respuesta.	$\int_0^5 \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}} dx = \frac{34}{3}$

b) $\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{\frac{2}{x}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Evaluando el límite, y observando cómo se comporta en valores cercanos a cero por la derecha, se pude observar que se obtiene una forma indeterminada del tipo 1^{∞}.	$\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{\frac{2}{x}} = (e^0 + 0)^{\frac{2}{0}} = 1^{\infty}$
2.	Para trabajar este límite se debe expresar la función como una exponencial, sabiendo que: $x^y = \left(e^{\ln(x)}\right)^y = e^{y*\ln(x)}$	$\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}*\ln(e^x+x)}$
3.	Aplicando las leyes de los límites.	$(e)^{\left(\lim_{x\to 0^+}(\frac{2}{x}*\ln(e^x+x))\right)}$
4.	Simplificando la expresión obtenida en el paso anterior, y trabajando solo con el exponente de la expresión se obtiene.	$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2*\ln(e^x+x)}{x}\right)$
5.	Evaluando el límite se puede observar que se obtiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.	$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2*\ln(e^x+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2*\ln(e^0+0)}{0}\right) = \frac{0}{0}$
6.	Al haber determinado que se tiene una forma indeterminada, se procede a aplicar la regla de l'Hospital: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2*\frac{1}{e^x+x}*(e^x+1)}{1}\right)$
7.	Simplificando la expresión obtenida en el paso anterior.	$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2*(e^x+1)}{e^x+x}\right)$
8.	Al evaluar el limite se obtiene el valor del exponente de la expresión obtenida en el paso no. 3	$\frac{2*(e^0+1)}{e^0+0} = \frac{2(2)}{1+0} = 4$
9.	Sustituyendo el valor del límite en la expresión obtenida en el paso 3.	$e^4 \approx 54.5984$
10.	Respuesta.	$\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{\frac{2}{x}} \approx e^4 \approx 54.5984$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS **PRIMER SEMESTRE 2016**
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA 09052016

Tema 2: (10 pts.)
Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $xy^3 - x^5y^2 = 4$ en el punto (1,2).

No.	Explicación	Operatoria
1.	El primero paso es obtener $y' = \frac{dy}{dx}$ por lo cual se deriva ambos lados de la ecuación.	$\frac{d}{dx}(xy^3 - x^5y^2) = \frac{d}{dx}(4)$
2.	Recordando que *y* es una función de *x* se debe aplicar la regla de la cadena, con lo cual se obtiene.	$x * 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 - \left(x^5 * 2y\frac{dy}{dx} + 5x^4 * y^2\right) = 0$
3.	Despejando $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación obtenida en el paso anterior.	$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4y^2 - y^3}{3xy^2 - 2x^5y}$
4.	En el punto (1,2) se tiene que x=3 y y=4, con esta información se encuentra el valor numérico de $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{5 * 1^{4*}2^2 - 2^3}{3 * 1 * 2^2 - 2 * 1^5 * 2} = \frac{3}{2}$
5.	Tomando en cuenta que la derivada de una función es igual a la pendiente de la recta tangente a esa funcion; y conociendo un punto de la recta, se utiliza la ecuación punto pendiente de la recta. $(y - y_0) = m(x - x_0)$	$(y - 2) = \frac{3}{2}(x - 1)$
6.	Despejando para y se obtiene la recta tangente a la curva $xy^3 - x^5y^2 = 4$	$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS **PRIMER SEMESTRE 2016**
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA 09052016

TEMA No. 3: (10 pts.)

Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a , b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$.

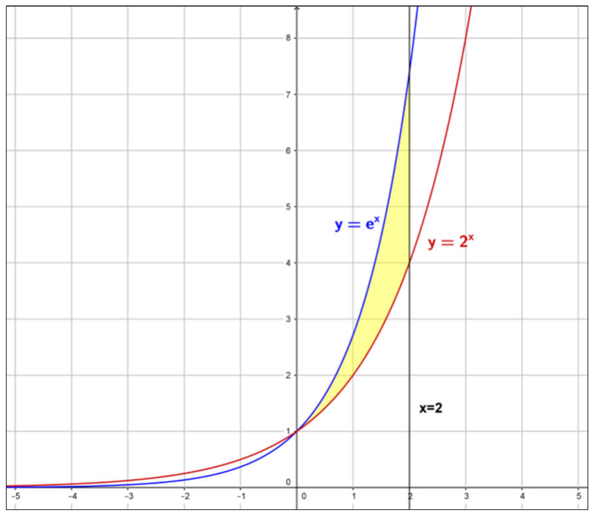
No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	El primer paso es evaluar el punto dado en la función, para obtener la ecuación número 1 con la cual se trabajara.	$f(1) = 2$ $a(1)^3 + b(1)^2 = 2$ $\boldsymbol{a + b = 2}$
2	Sabiendo que la gráfica de la función tiene un punto de inflexión cuando f''(x)=0, se procede a encontrar la segunda derivada de la función.	$f(x) = ax^3 + bx^2$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ $f''(x) = 6ax + 2b$
3	Conociendo la segunda derivada de la función, se iguala a cero y se valúan los valores del punto dado, para obtener la ecuación número 2 con la cual se trabajara.	$f''(1) = 0$ $6a(1) + 2b = 0$ $\boldsymbol{6a + 2b = 0}$
4	Luego de los pasos anteriores se logra obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Con lo cual el siguiente paso es despejar la variable ***a*** de la ecuación no. 1.	$\boldsymbol{a = 2 - b}$
5	El siguiente paso es sustituir ***a***, obtenida de la ecuación no.1, en la ecuación no. 2.	$6(2 - b) + 2b = 0$
6	Despejando para la variable ***b.***	$b = 3$
7	Sustituyendo el valor obtenido de b en la igualdad obtenida en el paso 4 se logra obtener el valor de ***a.***	$a = 2 - 3 = -1$

El valor de a , b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$ son:
$a = -1$ y $b = 3$

TEMA No. 4 (20 pts.)

Sea R la región acotada por las gráficas de $y = e^x$ y $y = 2^x$ y la recta $x = 2$.

a) Obtenga el área de la región R.



Grafica 1: Región acotada por las funciones dadas.

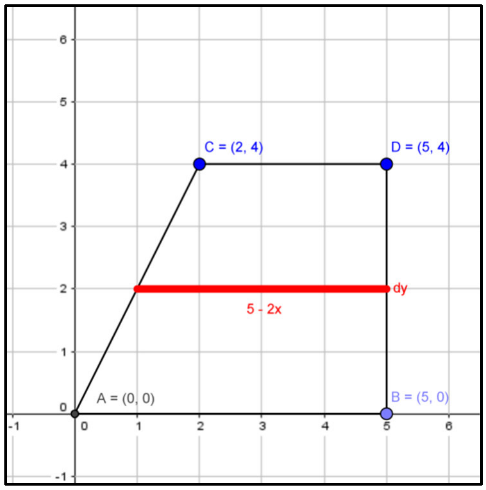
No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Se plantea la integral, deduciendo de la gráfica 1 los límites.	$A = \int_0^2 (e^x - 2^x)dx$
2.	Simplificando la integral, aplicando propiedades.	$A = \int_0^2 e^x dx - \int_0^2 2^x\, dx$
3.	Resolviendo la integral.	$A = \left(e^x - 2^x * \frac{1}{ln(2)}\right)\Big\|_0^2$
4.	Evaluando valores.	$A = \left(e^2 - \frac{2^2}{\ln(2)}\right) - \left(e^0 - \frac{1}{\ln(2)}\right)$
5	Respuesta.	$\mathrm{A} = 2.06\, u^2$

b) *Plantee* una integral para calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje $\boldsymbol{Y}$ por el método de Capas Cilíndricas. (**NO LA RESUELVA**).

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1.	Al hacer girar la región limitadas por las curvas dadas, se obtienen capas cilíndricas con radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $e^x - 2^x$. Por lo cual es volumen es:	$V = \int_0^2 2\pi x(e^x - 2^x)dx$
2.	Respuesta	$V = 2\pi \int_0^2 x(e^x - 2^x)dx$

TEMA No. 5: (10 pts.)

Calcule el trabajo necesario para bombear todo el líquido en el tanque lleno de 10 metros de largo cuya sección transversal se muestra en la figura, hacia un punto que está 1 metros arriba de la parte superior del tanque. (Densidad del líquido 800 kg/m³)



Grafica 2: Sección transversal del tanque, colocada en un plano cartesiano

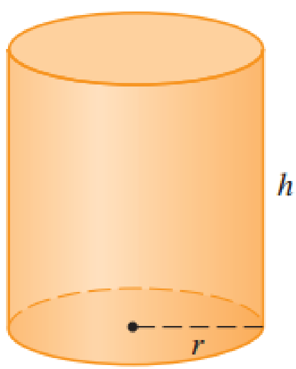
No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Luego de representar la sección transversal del tanque dentro de un sistemas de coordenadas; el primer paso es encontrar una ecuación que represente la recta formada por los puntos A y C. Para encontrar la ecuación, primero encontramos la pendiente de la recta tomando las coordenadas de los puntos A y C.	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{2-0} = 2$
2	Conociendo la pendiente y tomando el punto A, se procede a utilizar la fórmula de punto pendiente para encontrar la ecuación de la recta formada por los puntos A y C.	$(y - y_0) = m(x - x_0)$ $(y - 0) = 2(x - 0)$ $y = 2x$
3	Expresamos a la variable x en términos de y, ya que este valor se utiliza en el cálculo del ancho del diferencial de volumen.	$x(y) = \frac{y}{2}$
4	Se procede a encontrar un diferencial de volumen, el cual se represente en la gráfica 2 como la sección en color rojo. Para este diferencial de volumen se tienen las siguiente medidas: • Ancho = 5- x(y) • Alto = dy • Largo = 10m	$dv = largo * ancho * alto$ $dv = 10 * (5 - \frac{y}{2}) * dy$

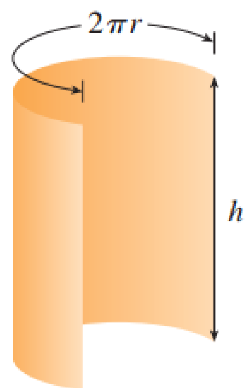
4	Se procede a encontrar un diferencial de masa, sabiendo que: *Masa= densidad*volumen*	$dm = 800 * 10 * (5 - \frac{y}{2}) * dy$
5	El siguiente paso es encontrar un diferencial de fuerza, sabiendo que la fuerza está dada por el peso del diferencial de masa: *Peso = masa * gravedad*	$dF = 9.8 * 800 * 10 * (5 - \frac{y}{2}) * dy$
6	Por último se debe plantear un diferencial de trabajo, sabiendo que: *Trabajo = fuerza*desplazamiento* El desplazamiento que realizara cada diferencial de volumen es igual a 6(distancia donde se encuentra metros menos la altura a la que se encuentra este diferencial, esto se expresa de la siguiente manera. $desplazamiento = 5 - y$	$dW = 78400 * (5 - y) * (5 - \frac{y}{2}) * dy$
7	Para calcular el trabajo total en el vaciado del tanque, se plantea la integran que se encargara de sumar el trabajo que se realiza para mover cada uno de los diferenciales de volumen, desde cero hasta cuatro.	$W = \int_0^4 78400(5 - y)\left(5 - \frac{y}{2}\right) dy$
8	Simplificando y desarrollando la expresión obtenida en el paso anterior.	$W = 78400 \int_0^4 \left(25 - \frac{15}{2}y + \frac{y^2}{2}\right) dy$
9	Desarrollando la integral.	$W = 78400 \left(\frac{y^3}{6} - \frac{15}{4}y^2 + 25y\right)\Big\|_0^4$
10	Evaluando los límites del resultado anterior.	$W = 78400 \left(\frac{4^3}{6} - \frac{15}{4}4^2 + 25 * 4\right)$
11	Respuesta.	$W = 3{,}972{,}266.667\ J$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS **PRIMER SEMESTRE 2016**
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA 09052016

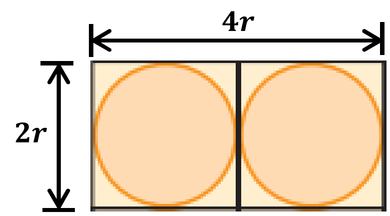
TEMA No. 6: (20 pts.)

Para construir un envase cerrado en forma de cilindro circular recto que tenga un volumen de 27 plg³, la tapa y la base se cortarán de trozos cuadrados de hojalata. Estime el radio del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su construcción, Incluya la hojalata que se desperdicia al obtener la tapa y la base y después determine la altura que debe tener el envase.





$$\boldsymbol{Area = (2\pi r)h}$$



$$\boldsymbol{Area = (2r)(4r) = 8r^2}$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	La cantidad total de hojalata empleada es igual a la suma del área lateral del cilindro y el área de las secciones cuadradas de donde se cortan las tapas. Ya que el problema indica que se debe tomar en cuenta el desperdicio de material al obtener las tapas, para el área de las tapas se toma un área rectangular, y no circulares, con medidas 2r y 4r.	$A = Area\ lateral + area\ tapas$ $A = (2\pi r)h + 8r^2$
2	Se necesita expresar el área únicamente en términos del radio, por lo cual debemos sustituir la variable h, que se encuentra en la ecuación obtenida en el paso anterior, por une expresión en términos de r. Para esto se utiliza la condición que nos da el problema, donde indica que el volumen del envasé debe ser de 27 pulgadas cubicas.	$V = \pi r^2 h$ $27 = \pi r^2 h$
3	Despejando la ecuación, obtenida en el paso anterior, para h.	$h = \dfrac{27}{\pi r^2}$

4	Sustituyendo el valor de h, obtenido en el paso3, en la formula encontrada en el paso 1 se logra obtener el área en términos del radio.	$A = (2\pi r)\left(\frac{27}{\pi r^2}\right) + 8r^2$
4	Simplificando la expresión obtenida en el paso anterior.	$A(r) = 8r^2 + \frac{54}{r}$
5	Para optimizar la cantidad de material que se utilizara en la construcción del envasé, se procede a derivar la función del área.	$A'(r) = 16r - \frac{54}{r^2}$
6	Para encontrar el radio donde el área se hace mínima, igualamos la primera derivada a cero.	$0 = 16r - \frac{54}{r^2}$
7	Con la primera derivada igualada a cero, despajamos para encontrar el valor del radio.	$0 = r\left(16 - \frac{54}{r^3}\right)$ $\boldsymbol{r_1 = 0}$ $16 - \frac{54}{{r_2}^3} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{r_2 = \sqrt[3]{\frac{54}{16}} = \frac{3}{2}\ in}$
8	Luego de haber obtenido el radio, con el cual se utiliza la mínima cantidad de material, se procede a encontrar la altura del envase. Para lo anterior, se sustituye el radio encontrado en la educación del paso no. 3.	$h = \frac{27}{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2} \approx 3.8197\ in$
9	Para asegurarnos que el radio obtenido representa un mínimo local de la función, se aplica la prueba de la segunda derivada la cual nos dice: Si • $f'(x) = 0$ & $f''(x) < 0$ entonces es un máximo • $f'(x) = 0$ & $f''(x) > 0$ entonces es un mínimo	$A''(r) = 16 + \frac{108}{r^3}$ $A''\left(\frac{3}{2}\right) = 16 + \frac{108}{\frac{3}{2}^3} = 48$ $\mathbf{48 > 0}$

El valor del radio y altura para construir un envase con la mínima cantidad de material es:

$$\boldsymbol{r = \frac{3}{2}\ in}$$
$$\boldsymbol{h = 3.8197\ in}$$