CLAVE-103-4-M-2-12-2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**Matemática Básica 2**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
AUXILIAR:	**Rodolfo Guzmán Cermeño**
FECHA DE EXAMEN:	**30 de diciembre de 2016**
SEMESTRE:	**Segundo**
REVISOR:	**Ing. Tony Barrera**
CLAVE:	**CLAVE-103-4-M-2-12-2016**

TEMARIO

Anexo: 2016-02CV-04Final-MB2.pdf

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 20 puntos

Inciso a)

$$\int_2^5 |x^2-4x|dx$$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se reescribe la desigualdad como una función definida por partes.</td><td>$|x^2-4x| = \begin{cases} x^2-4x, & x^2-4x \geq 0 \\ -(x^2-4x), & x^2-4x < 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se resuelve la desigualdad.</td><td>$x^2-4x \geq 0$
$x(x-4) \geq 0$
<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty,0)$</th><th>$(0,4)$</th><th>$(4,\infty)$</th></tr>
<tr><td>$(\boldsymbol{x})$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(\boldsymbol{x-4})$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td></td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
$\begin{cases} x^2-4x \geq 0, & x \in (-\infty,0] \cup [4,\infty) \\ x^2-4x < 0, & x \in (0,4) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se reescribe la integral en dos integrales dados los dominios solución de la desigualdad.</td><td>$\int_2^5 |x^2-4x|dx$
$= \int_2^4 (x^2-4x)dx + \int_4^5 -(x^2-4x)dx$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se resuelve la integral por medio de la anti derivada.</td><td>$=[1/3\,x^3-2x^2]_2^4 - [1/3\,x^3-2x^2]_4^5$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Se valúa la integral y se simplifica aritméticamente.</td><td>$= \frac{23}{3}$</td></tr>
</table>

R./

$$\int_2^5 |x^2-4x|dx = \frac{23}{3}$$

Inciso b)

$$\int_0^1 \frac{36x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se reescribe la integral.	$\int_0^1 \frac{36x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$ $= \int_0^1 \frac{36x^2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1-1/4x^6}}dx$ $= 18\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-1/4x^6}}$
2.	Se introduce una variable de sustitución.	$u = 1/2\,x^3$ $du = 3/2\,x^2dx$ $u(0) = 0$ $u(1) = 1/2$
3.	Se sustituye x por u.	$= 18\int_0^{1/2} \frac{2/3\;du}{\sqrt{1-u^2}} = 12\int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4.	Se obtiene la anti derivada.	$= 12[\operatorname{sen}^{-1} u]_0^{1/2}$
5.	Se valúa la anti derivada y se simplifica aritméticamente.	$= 2\pi$

R./

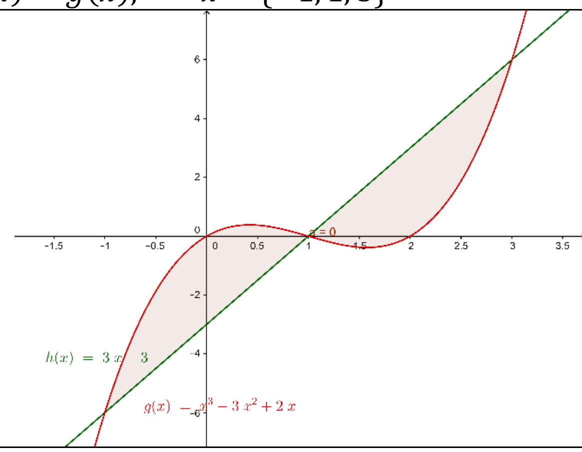
$$\int_0^1 \frac{36x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx = 2\pi$$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 2**

Tema 2. 20 puntos

Determine el área de la o las regiones delimitadas por las curvas.

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad h(x) = 3x - 3$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentran los puntos de intersección entre las curvas y con los ejes.	$h(0) = -3$ $g(0) = 0$ $Si\ h(x) = 0, \quad x = 1$ $Si\ g(x) = 0, \quad x = \{0, 2, 1\}$ $Si\ h(x) = g(x), \quad x = \{-1, 1, 3\}$
2.	Graficar.	
3.	Se plantea la integral para calcular el área.	$A = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - h(x)\big)dx + \int_{1}^{3} \big(h(x) - g(x)\big)dx$
4.	Se sustituye las funciones y se simplifica algebraicamente.	$= \int_{-1}^{1} \big((x^3 - 3x^2 + 2x) - (3x - 3)\big)dx$ $+ \int_{1}^{3} \big((3x - 3) - (x^3 - 3x^2 + 2x)\big)dx$ $= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx - \int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$
5.	Se obtiene la anti derivada.	$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{1}$ $- \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{3}$

6.	Se valúa la anti derivada y se simplifica aritméticamente.	$= 2 + 6$

R./
$El\ \acute{a}rea\ es\ igual\ a\ 8\ unidades\ cuadradas.$

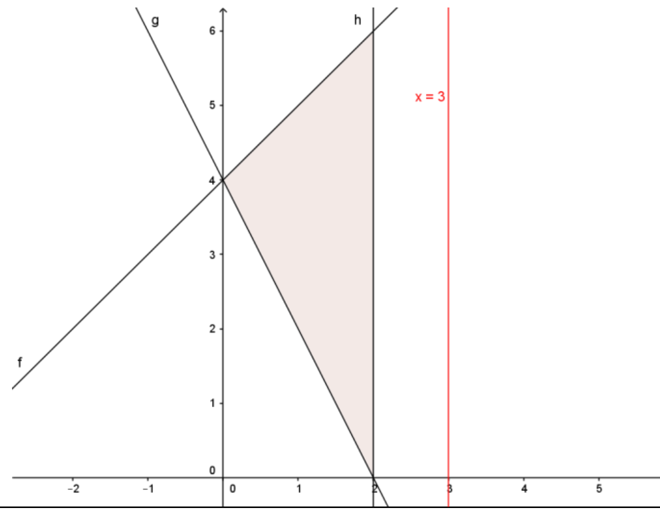
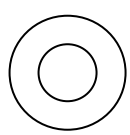
Tema 3. 25 puntos

Determine el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región acotada por las siguientes curvas:

Inciso a)

Alrededor del eje:

$$x = 3$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafica la región acotada y el eje de revolución.	
2.	Se analiza el gráfico y se concluye que se deberá utilizar el método de cascarones cilíndricos.	
3.	Se plantea la integral.	$V = \int_{V_0}^{V_1} dV = \int_0^6 A\, dy$
4.	Se despejan las curvas de acotación en términos de y.	$x = y - 4, \qquad x = 2 - \frac{1}{2}y, \qquad x = 2$
5.	Se plantea el área del cascarón cilíndrico.	 $A = \pi(\mathrm{R} - \mathrm{r})^2$ $r = 1$ $R = \begin{cases} 3 - \left(2 - \frac{1}{2}y\right), & y \in (0,4) \\ 3 - (y - 4), & y \in (4,6) \end{cases}$

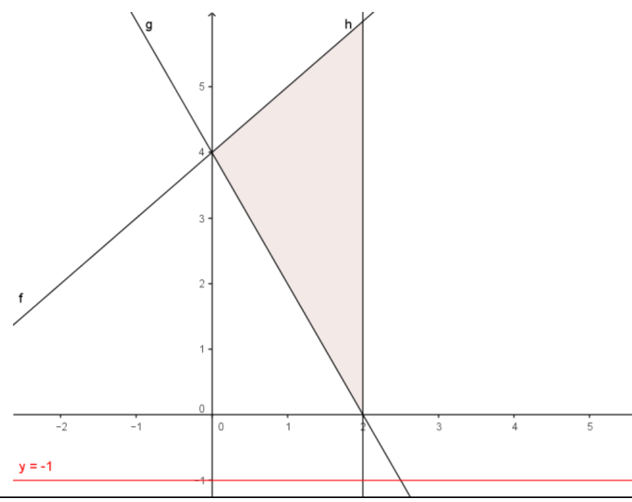
		$A = \pi \begin{cases} \frac{1}{4}y^2 + 2y, & y \in (0,4) \\ y^2 - 14y + 48, & y \in (4,6) \end{cases}$
6.	Se sustituye el área en la integral.	$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{1}{4}y^2 + 2y\right) dy + \int_4^6 \pi(y^2 - 14y + 48)dy$
7.	Se obtiene la anti derivada, se valúa y se simplifica algebraicamente.	$= \frac{64}{3}\pi + \frac{20}{3}\pi = 28\pi$

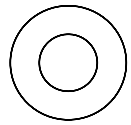
R./
$El\ área\ es\ igual\ a\ 28\pi\ unidades\ cuadradas.$

Inciso b)

Alrededor del eje:

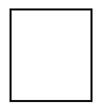
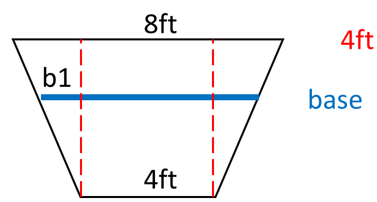
$$y = -1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafica la región acotada y el eje de revolución.	
2.	Se analiza el gráfico y se concluye que se deberá utilizar el método de cascarones cilíndricos.	
3.	Se plantea la integral.	$V = \int_{V_0}^{V_1} dV = \int_0^2 A\ dx$
4.	Se escriben las curvas de acotación en términos de equis.	$y = x + 4, \qquad y = -2x + 4$

5.	Se plantea el área del cascarón cilíndrico.	 $A = \pi(\mathrm{R} - \mathrm{r})^2$ $r = -2x + 4$ $R = x + 4$ $A = \pi(-3x^2 + 24x)$
6.	Se sustituye el área en la integral.	$V = \int_0^2 \pi(-3x^2 + 24x)dx$
7.	Se obtiene la anti derivada, se valúa y se simplifica algebraicamente.	$= 24\pi$

R./
$El\ área\ es\ igual\ a\ 24\pi\ unidades\ cuadradas.$

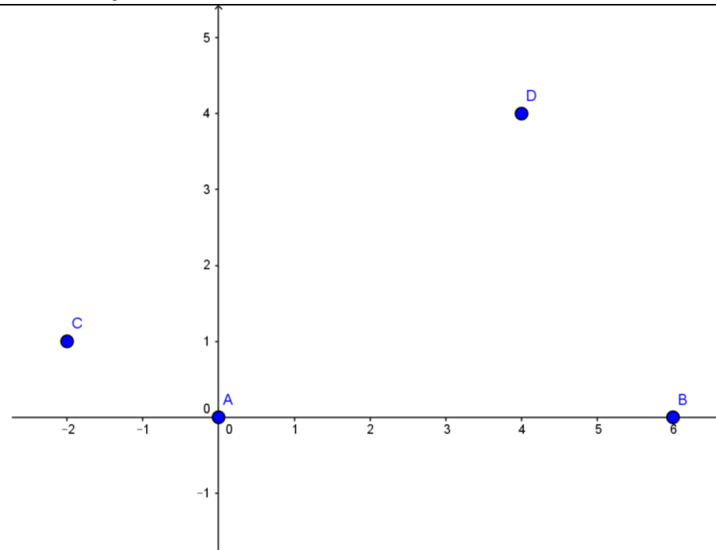
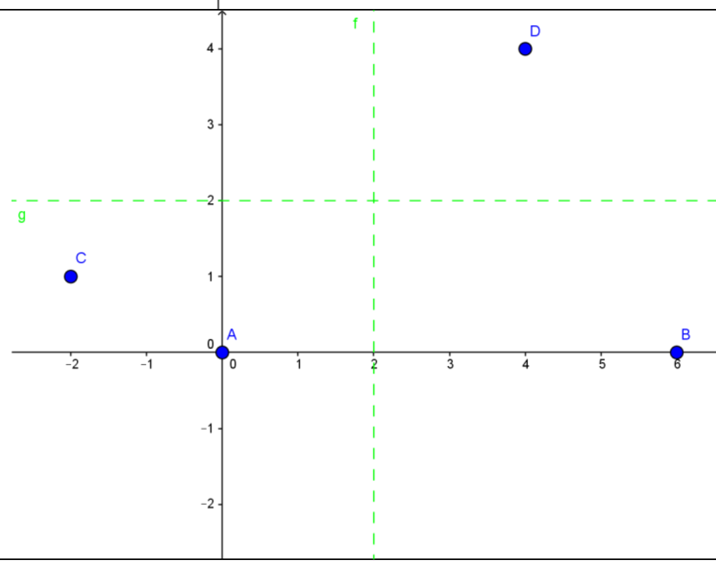
Tema 4. 20 puntos

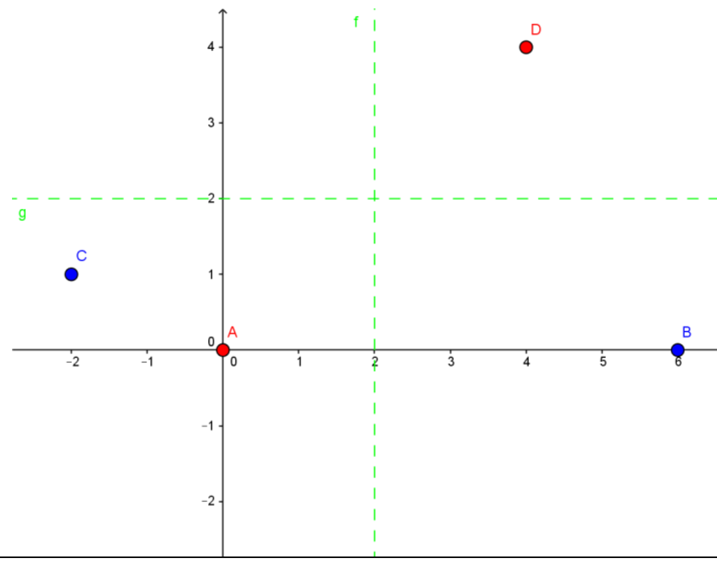
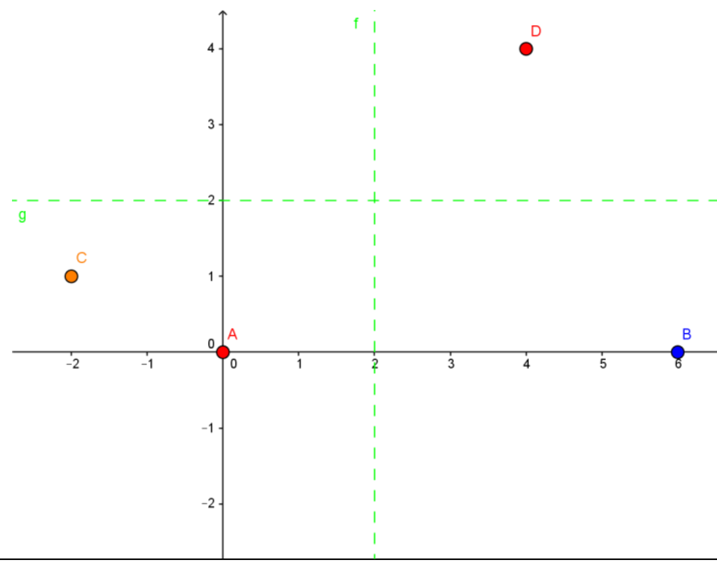
No.	Explicación	Operatoria
1.	Plantear ecuación de trabajo.	$W = F\ h$ $W = m\ g\ h$ $W = V\ \rho\ g\ h$ $W = V\ \rho\ g\ h$ $W = A\ \Delta h\ \rho\ g\ h$
2.	Identificar constantes.	$g = 32\frac{ft}{s^2}$ $\rho = 62\frac{Lb}{ft^3}$
3.	Plantear ecuación del Área.	 $A = base \times altura$ $A = base \times (10ft)$
4.	La base está compuesta por la suma entre el lado inferior del trapecio y dos segmentos de recta idénticos $b1$ que están directamente relacionados con la altura h del agua.	
5.	Por medio de triángulos semejantes se establece la relación entre los segmentos $b1$ y la altura h.	$\frac{b1}{2} = \frac{9-h}{4}, \qquad b1 = \frac{9-h}{2}$
6.	Se sustituye el valor de la base en la ecuación del Área.	$A = \left(2\left(\frac{9-h}{2}\right) + 4\right) \times (10ft) = 130 - 10h$
7.	Se sustituye los valores de las constantes y las variables en la ecuación de trabajo.	$W = (130 - 10h) \cdot \Delta h \cdot (62) \cdot (32) \cdot h$ $W = (130 - 10\ h) \cdot 9920 \cdot\ h\ \Delta h$ $W = 99200(13h - h^2)\Delta h$
8.	Se plantea la integral.	$W = \int_6^9 49600(7h - h^2)\mathrm{d}h$
9.	Se obtiene la anti derivada, se valúa y se simplifica algebraicamente.	$W = 12\ 052\ 800$

R./
$Se\ efectúa\ un\ trabajo\ total\ de\ 12{,}052{,}800\ lb \cdot ft$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 2**

Tema 5. 15 puntos

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Localizar los puntos sobre la curva de la función.	
2.	Localizar las asíntotas.	

3.	Identificar Puntos Máximos y Mínimos.	
4.	Identificar puntos de inflexión.	

5.	Trazar Gráfica Aproximada.