PROBLEMA RESUELTO 5

Utilice derivación logarítmica para calcular $\frac{dy}{dx}$

$$xy = \left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}$$

Solución

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\ln(xy) = \ln\left[\left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}\right]$$

$$\ln x + \ln y = \tan x \cdot \ln\left(\cos(x^4)\right)$$

Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$D_x\left(\ln x + \ln y\right) = D_x\left(\tan x \cdot \ln\left(\cos(x^4)\right)\right)$$

Observe que en el dado derecho se debe utilizar la derivada del producto

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' = \tan x \cdot \frac{1}{\cos(x^4)}(-\operatorname{sen}(x^4)(4x^3) + \ln\left(\cos(x^4)\right) \cdot \sec^2 x$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{-4x^3 \tan x \cdot \operatorname{sen}(x^4)}{\cos(x^4)} + \ln\left(\cos(x^4)\right) \cdot \sec^2 x + \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(-4x^3 \tan x \cdot \tan(x^4) + \ln\left(\cos(x^4)\right) \cdot \sec^2 x - \frac{1}{x}\right)y$$

$$= \left(-4x^3 \tan x \cdot \tan(x^4) + \ln\left(\cos(x^4)\right) \cdot \sec^2 x - \frac{1}{x}\right)\frac{\left(\cos(x^4)\right)^{\tan x}}{x}$$