

PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule la derivada de la función utilizando derivación logarítmica

$$y = \frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}}$$

Solución

Aplicando logaritmos naturales y sus propiedades a ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \left[\frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}} \right] \\ \ln y &= \ln(x^2 + 4)^5 - \ln(x^7) - \ln(\sqrt[3]{4 - x^2}) \\ \ln y &= 5\ln(x^2 + 4) - 7\ln x - \frac{1}{3}\ln(4 - x^2)\end{aligned}$$

Ahora se deriva implícitamente la ecuación anterior

$$\begin{aligned}D_x[\ln y] &= D_x \left[5\ln(x^2 + 4) - 7\ln x - \frac{1}{3}\ln(4 - x^2) \right] \\ \frac{1}{y} D_x y &= \frac{5}{x^2 + 4} \cdot D_x(x^2 + 4) - \frac{7}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 - x^2} \cdot D_x(4 - x^2) \\ \frac{1}{y} D_x y &= \frac{5}{x^2 + 4} \cdot (2x) - \frac{7}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 - x^2} \cdot (2x)\end{aligned}$$

Ordenando el lado derecho y trasladando y a multiplicar se obtiene la derivada

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} D_x y &= \frac{10x}{x^2 + 4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4 - x^2)} \\ D_x y &= \left(\frac{10x}{x^2 + 4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4 - x^2)} \right) \cdot y \\ D_x y &= \left(\frac{10x}{x^2 + 4} - \frac{7}{x} - \frac{2x}{3(4 - x^2)} \right) \frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}}\end{aligned}$$

Para simplificar aún más la respuesta será necesario desarrollar la suma de fracciones que se encuentra entre paréntesis, que es un trabajo de álgebra elemental

$$\begin{aligned}D_x y &= \left(\frac{10x(3x)(4 - x^2) - 21(x^2 + 4)(4 - x^2) - 2x(x)(x^2 + 4)}{3x(x^2 + 4)(4 - x^2)} \right) \frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}} \\ &= \left(\frac{10x(3x)(4 - x^2) - 21(x^2 + 4)(4 - x^2) - 2x(x)(x^2 + 4)}{3x(x^2 + 4)(4 - x^2)} \right) \frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}} \\ &= \left(\frac{120x^2 - 30x^4 + 21x^4 - 168x^2 + 336 - 2x^4 - 8x^2}{3x(x^2 + 4)(4 - x^2)} \right) \frac{(x^2 + 4)^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{4 - x^2}} \\ &= \frac{(-11x^4 - 56x^2 + 336)(x^2 + 4)^4}{3x^8(4 - x^2)^{4/3}}\end{aligned}$$

