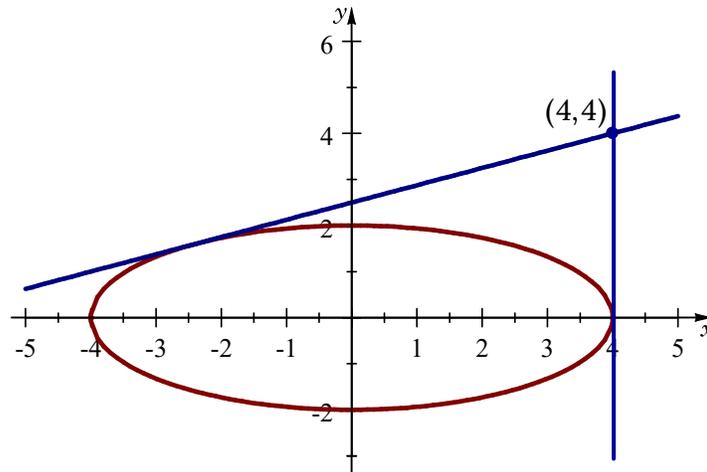


PROBLEMA RESUELTO 4

Encuentre las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ y que pasan por el punto $(4,4)$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la elipse y las dos rectas cuyas ecuaciones se buscan



La pendiente de la recta tangente a la elipse se puede calcular por derivación implícita

$$D_x(x^2 + 4y^2) = D_x 16$$

$$2x + 8yy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{8y}$$

$$= -\frac{x}{4y}$$

Si (a,b) el punto sobre la elipse, en donde la recta es tangente a la elipse, la pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto (a,b) es

$$m = -\frac{a}{4b}$$

La pendiente de la recta tangente también puede expresarse como la pendiente entre dos puntos $(4,4)$ y (a,b) , es decir

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b - 4}{a - 4}$$

Igualando las dos pendientes se obtiene una ecuación con 2 variables

$$-\frac{a}{4b} = \frac{b-4}{a-4}$$

$$-a(a-4) = 4b(b-4)$$

$$-a^2 + 4a = 4b^2 - 16b$$

$$a^2 + 4b^2 - 4a - 16b = 0$$

Como el punto (a,b) está en la elipse, entonces satisface la ecuación de la misma, es decir

$$a^2 + 4b^2 = 16$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y despejando b

$$16 - 4a - 16b = 0$$

$$16 - 4a = 16b$$

$$\frac{4-a}{4} = b$$

Sustituyendo en la ecuación $a^2 + 4b^2 = 16$ y despejando a

$$a^2 + 4\left(\frac{4-a}{4}\right)^2 = 16$$

$$a^2 + \frac{16 - 8a + a^2}{4} - 16 = 0$$

$$4a^2 + 16 - 8a + a^2 - 64 = 0$$

$$5a^2 - 8a - 48 = 0$$

$$(a-4)(5a+12) = 0$$

De donde se obtiene que $a = 4$ y $a = -\frac{12}{5}$

Para $a = 4$, se tiene

$$b = \frac{4-a}{4} = \frac{4-4}{4} = 0$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $(4,0)$ es

$$m = \frac{-a}{4b} = \frac{-4}{0}, \text{ no está definida}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$x = 4$$

Para $a = -\frac{12}{5}$, se tiene que $b = \frac{4 + \frac{12}{5}}{4} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$

La pendiente de la recta tangente en el punto $\left(-\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es

$$m = \frac{-a}{4b} = \frac{-\frac{12}{5}}{4\left(-\frac{8}{5}\right)} = \frac{3}{8}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{8}{5} = \frac{3}{8}\left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$40y - 64 = 15x + 36$$

$$15x - 40y + 100 = 0$$

$$3x - 8y + 20 = 0$$
