

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule $D_x y$

$$x \tan^{-1} y + \sin^{-1}(x + y) = 1$$

Solución

En este caso se debe usar derivación implícita para calcular la derivada. Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x [x \tan^{-1} y + \sin^{-1}(x + y)] = D_x 1$$

$$x \cdot D_x (\tan^{-1} y) + \tan^{-1} y \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} \cdot D_x (x + y) = 0$$

$$x \cdot \frac{1}{1 + y^2} \cdot y' + \tan^{-1} y + \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} \cdot (1 + y') = 0$$

Agrupando en el lado izquierdo los términos que contienen la derivada y trasladando al lado derecho los términos que no la contienen

$$\frac{x}{1 + y^2} \cdot y' + \frac{y'}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} = -\tan^{-1} y - \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}$$

Tomando factor común y despejando la derivada

$$\left(\frac{x}{1 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} \right) y' = -\tan^{-1} y - \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}$$
$$y' = \frac{-\tan^{-1} y - \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}}{\frac{x}{1 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}}$$

Simplificando la expresión anterior

$$y' = \frac{\frac{-\tan^{-1} y \cdot \sqrt{1 - (x + y)^2} - 1}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}}{\frac{x\sqrt{1 - (x + y)^2} + 1 + y^2}{(1 + y^2)\sqrt{1 - (x + y)^2}}}$$
$$y' = \frac{(-\tan^{-1} y \cdot \sqrt{1 - (x + y)^2} - 1)(1 + y^2)}{x\sqrt{1 - (x + y)^2} + 1 + y^2}$$
