

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la segunda derivada y''

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2$$

Solución

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(x^{1/2} + y^{1/2}) = D_x 2$$

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y' = 0$$

Despejando la primera derivada

$$\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}y^{-1/2}}$$

$$y' = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

Derivando nuevamente con respecto a x para obtener la segunda derivada

$$D_x(y') = D_x\left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right)$$

$$y'' = -\frac{x^{1/2} \cdot D_x(y^{1/2}) - y^{1/2} \cdot D_x(x^{1/2})}{(x^{1/2})^2}$$

$$= -\frac{x^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y'\right) - y^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{x}$$

Como en la segunda derivada, aparece la primera derivada, hay que sustituir la expresión obtenida para la primera derivada

$$y' = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

Haciendo la sustitución y simplificando

$$y'' = -\frac{x^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right)\right) - y^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{x}$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{x}$$

$$y'' = \frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{2x^{3/2}}$$

Finalmente, como se sabe que $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$. Al sustituir esta expresión en la segunda derivada, se obtiene una respuesta más simple

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{2}{2x^{3/2}} \\ &= \frac{1}{x^{3/2}} \end{aligned}$$
