

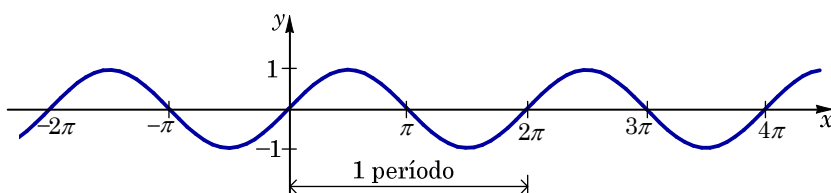
2.6 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

OBJETIVOS

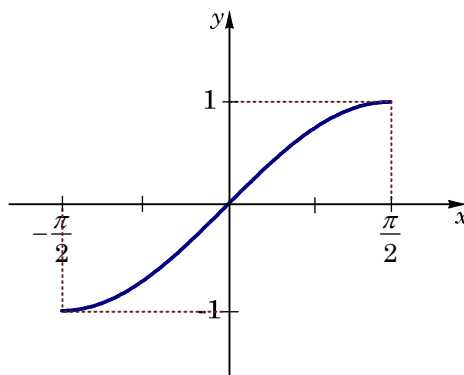
- Dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.
- Calcular derivadas de funciones que involucren funciones trigonométricas inversas.
- Resolver problemas de rectas tangentes y razones de cambio en donde se involucren funciones trigonométricas inversas.

Función seno inverso

La función $f(x) = \sin x$, tiene dominio $(-\infty, \infty)$, el rango de la función es el intervalo $[-1, 1]$ y el período de la función es 2π . Su gráfica se muestra en la siguiente figura



Claramente la función no es uno a uno, para definir su función inversa es necesario hacer una restricción al dominio de tal forma que la función sea uno a uno. Hay muchas restricciones posibles pero la mas apropiada consiste en restringir el dominio al intervalo cerrado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Al hacer la restricción la función queda como se muestra en la figura siguiente



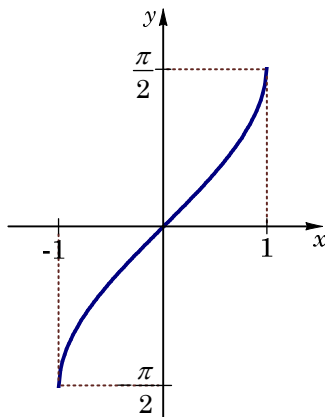
En estas condiciones la función $f(x) = \sin x$ tiene una función inversa que se representa como

$$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$$

El dominio de la función seno inverso es el intervalo $[-1, 1]$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por la definición de función inversa, se tiene la siguiente propiedad

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \quad \text{y} \quad \sin(\sin^{-1} x) = x$$

La gráfica de la función $f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1} x$ se muestra en la figura siguiente



Derivada de la función seno inverso

Para obtener una fórmula para la derivada de la función $y = \text{sen}^{-1} x$ se utiliza la propiedad enunciada arriba y derivación implícita como se muestra a continuación

$$y = \text{sen}^{-1} x$$

$$\text{sen } y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$$

$$\text{sen } y = x$$

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(\text{sen } y) = D_x x$$

$$\cos y \cdot D_x y = 1$$

$$D_x y = \frac{1}{\cos y}$$

En ésta última expresión se debe recordar que y está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, se tiene que

$$\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

Observe que solo se toma el valor positivo de la raíz ya que en intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ el coseno siempre es positivo, por otro lado, al observar la gráfica de la función seno inverso, la pendiente es positiva para todo el dominio.

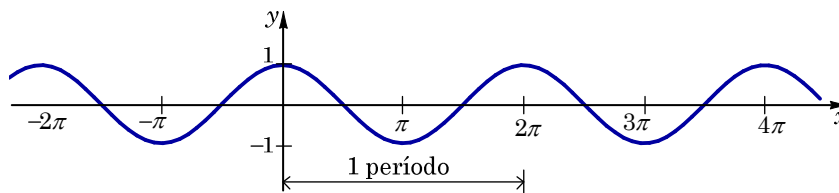
$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

Finalmente observe que se puede sustituir $\text{sen } y = x$, para obtener la fórmula buscada.

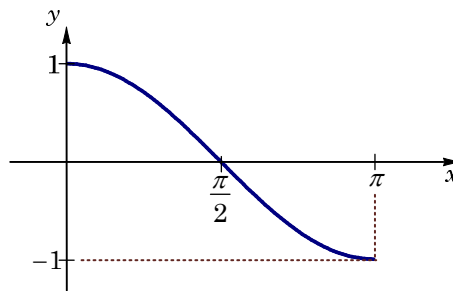
$$D_x(\text{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La función coseno inverso

La función $f(x) = \cos x$, tiene dominio $(-\infty, \infty)$, el rango de la función es el intervalo $[-1, 1]$ y el período de la función es 2π . Su gráfica se muestra en la siguiente figura



Claramente la función no es uno a uno, para definir su función inversa es necesario hacer una restricción al dominio de tal forma que la función sea uno a uno. Hay muchas restricciones posibles pero la más apropiada consiste en restringir el dominio al intervalo cerrado $[0, \pi]$. Al hacer la restricción la función queda como se muestra en la figura siguiente



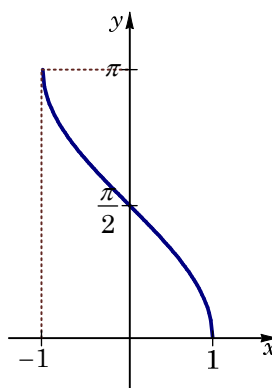
En estas condiciones la función $f(x) = \cos x$ tiene una función inversa que se representa como

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$$

El dominio de la función seno inverso es el intervalo $[-1, 1]$ y su rango es $[0, \pi]$. Por la definición de función inversa, se tiene la siguiente propiedad

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{y} \quad \cos(\cos^{-1} x) = x$$

La gráfica de la función $y = \cos^{-1} x$ se muestra en la figura siguiente



Derivada de la función coseno inverso

Para obtener una fórmula para la derivada de la función $y = \cos^{-1} x$ se utiliza el mismo procedimiento que se utilizó para la función seno inverso

$$y = \cos^{-1} x$$

$$\cos y = \cos(\cos^{-1} x)$$

$$\cos y = x$$

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(\cos y) = D_x x$$

$$-\operatorname{sen} y \cdot D_x y = 1$$

$$D_x y = \frac{1}{-\operatorname{sen} y}$$

En ésta última expresión se debe recordar que y está en el intervalo $[0, \pi]$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

Observe que solo se toma el valor positivo de la raíz ya que en intervalo $[0, \pi]$ el seno siempre es positivo, por otro lado, al observar la gráfica de la función coseno inverso, puede verse que la pendiente es negativa en todo su dominio.

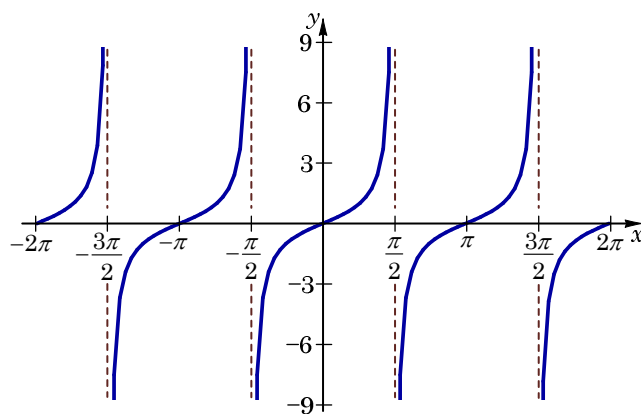
$$D_x y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

Finalmente observe que se puede sustituir $\cos y = x$, para obtener la fórmula buscada.

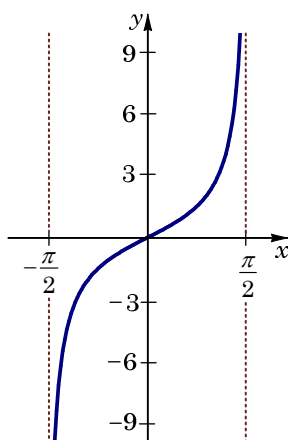
$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La función tangente inversa

El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos números en donde la gráfica tiene una asíntota vertical; estos números son $\frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es cualquier entero. El rango de la función tangente es $(-\infty, \infty)$. La función tangente es periódica, de período π . La gráfica de la función tangente se muestra en la figura siguiente



La función no es uno a uno, para definir su función inversa es necesario hacer una restricción al dominio de tal forma que la función sea uno a uno. Hay muchas restricciones posibles pero la más apropiada consiste en restringir el dominio al intervalo cerrado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Al hacer la restricción la función queda como se muestra en la figura siguiente



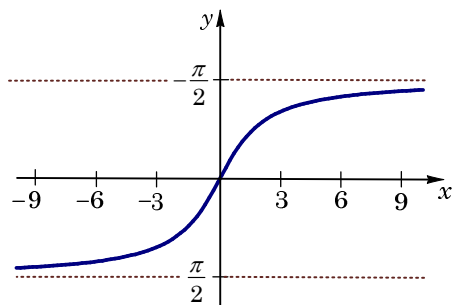
En estas condiciones la función $f(x) = \tan x$ tiene una función inversa que se representa como

$$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$$

El dominio de la función tangente inversa es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por la definición de función inversa, se tiene la siguiente propiedad

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \text{y} \quad \tan(\tan^{-1} x) = x$$

La gráfica de la función tangente inversa se muestra en la figura siguiente



Derivada de la función tangente inversa

Para obtener una fórmula para la derivada de la función $y = \tan^{-1} x$ se utiliza el mismo procedimiento que se utilizó para las funciones seno y coseno

$$\begin{aligned}y &= \tan^{-1} x \\ \tan y &= \tan(\tan^{-1} x) \\ \tan y &= x\end{aligned}$$

Derivando ambos lados con respecto a x

$$\begin{aligned}D_x(\tan y) &= D_x x \\ \sec^2 y \cdot D_x y &= 1 \\ D_x y &= \frac{1}{\sec^2 y}\end{aligned}$$

En ésta última expresión se debe recordar que y está en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\tan^2 y + 1 = \sec^2 y$, se tiene que

$$D_x y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

Finalmente observe que se puede sustituir $\tan y = x$, para obtener la fórmula buscada.

$$D_x(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivadas de las otras funciones trigonométricas

Las derivadas de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante se pueden obtener siguiendo un procedimiento similar al que se ha utilizado para las tres primeras funciones. También es posible obtener las fórmulas utilizando la regla de la cadena y las identidades trigonométricas siguientes

$$\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Por ejemplo, al utilizar la segunda de las identidades para obtener la derivada de la función secante inversa se tiene

$$\begin{aligned}D_x(\sec^{-1} x) &= D_x\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} D_x\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}}\end{aligned}$$

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x} \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Resumen de las formulas para derivar trigonométricas inversas

$$D_x(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$$

$$D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$$

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

$$D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$$

$$D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1 + u^2} D_x u$$

$$D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$