2.4 Derivación implícita

INTRODUCCIÓN

La derivación implícita se utiliza para calcular la derivada en ecuaciones en donde no se puede, o bien es muy difícil, despejar la variable dependiente en términos de la variable independiente para obtener una función expresada de manera explícita.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Encontrar la derivada en una ecuación de dos variables usando derivación implícita.
- Calcular derivadas de orden superior utilizando las reglas de derivación.
- Resolver problemas aplicados a las ciencias económicas en donde el modelo resultante es una ecuación que debe derivarse usando derivación implícita.

Derivación implícita

Se dice que y está expresada explícitamente en términos de x cuando y es una función de x, es decir que existe una función $y = f(x)$, por ejemplo en la ecuación $y = x^2 + 2x - 3$.

Cuando y no está despejada en términos de x, se dice que las variables están relacionadas implícitamente, como por ejemplo en la ecuación $xy + 1 = x^2y + y^2$, en donde la variable y aparece en ambos lados de la ecuación.

Para calcular la derivada de y con respecto a x se utiliza el procedimiento llamado derivación implícita y que se describe a continuación

1. Derive ambos lados de la ecuación con respecto a x, utilizando las reglas de derivación.
2. Agrupar todos los términos que contienen la derivada de y con respecto a x en el lado izquierdo de la ecuación y todos los términos que no contienen la derivada en el lado derecho de la ecuación. La derivada se puede representar en cualquiera de las formas: $\dfrac{dy}{dx}$, D_xy o y'
3. Tome la derivada como factor común en el lado izquierdo de la ecuación.
4. Despeje la derivada trasladando a dividir al lado derecho de la ecuación el factor que la acompaña.

La clave de la derivación implícita consiste en suponer que existe una función $y = f(x)$ aunque esta no se pueda expresar explícitamente; entonces al aplicar las reglas de derivación para y siempre se debe utilizar la regla de la cadena ya que y es una función de x.

$$f(x) = y$$

$$g(f(x)) = g(y)$$

$$D_x[g(f(x))] = D_x[g(y)]$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(y) \cdot D_xy$$

Observe algunas funciones y su correspondiente derivación implícita

$$D_x(x^2) = 2x \qquad\qquad D_x(y^2) = 2y \cdot D_xy$$

$$D_x\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \qquad D_x\left(y^{2/3}\right) = \frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot D_x y$$

$$D_x(\tan x) = \sec^2 x \qquad D_x(\tan y) = \sec^2 y \cdot D_x y$$

Ejemplo 1: Derivación implícita

Utilice derivación implícita para calcular la primera derivada

$$2x^2 + 3y^3 = 12xy$$

Solución

Se comienza derivando ambos lados de la ecuación respecto a la variable x

$$D_x\left[2x^2 + 3y^3\right] = D_x[12xy]$$

Usando las reglas de derivación para derivar ambos lados. Observe que el lado izquierdo es una suma mientras que el lado derecho es un producto

$$D_x\left(2x^2\right) + D_x\left(3y^3\right) = (12x)D_x(y) + yD_x(12x)$$

Ahora se usan las reglas de derivación conocidas

$$4x + 9y^2 D_x y = (12x)D_x y + y(12)$$

Observe en la ecuación anterior que al derivar la variable y en términos de x se usa la regla de la cadena y por eso se multiplica por $D_x y$.

Trasladando los términos que contienen la derivada al lado izquierdo de la ecuación

$$9y^2 D_x y - 12x D_x y = 12y - 4x$$

Factorizando $D_x y$

$$D_x y\left(9y^2 - 12x\right) = 12y - 4x$$

Despejando la derivada

$$D_x y = \frac{12y - 4x}{9y^2 - 12x}$$

Finalmente se puede simplificar la respuesta

$$D_x y = \frac{4(3y - x)}{3(3y^2 - 4x)}$$

Ejemplo 2: Derivación implícita

Utilice derivación implícita para calcular la primera derivada

$$x^4 y^3 = \tan(x + y)$$

Solución

Este caso tiene la dificultad adicional de incluir funciones trigonométricas. Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$D_x\left[x^4y^3\right] = D_x\left[\tan(x + y)\right]$$

$$x^4D_x(y^3) + y^3D_x(x^4) = \sec^2(x + y)\cdot D_x(x + y)$$

$$x^4(3y^2)D_xy + y^3(4x^3) = \sec^2(x + y)\cdot(1 + D_xy)$$

Para despejar D_xy es necesario desarrollar el producto del lado derecho y trasladar los términos que contienen la derivada al lado izquierdo

$$3x^4y^2D_xy + 4x^3y^3 = \sec^2(x + y) + \sec^2(x + y)D_xy$$

$$3x^4y^2D_xy - \sec^2(x + y)D_xy = \sec^2(x + y) - 4x^3y^3$$

$$D_xy\left(3x^4y^2 - \sec^2(x + y)\right) = \sec^2(x + y) - 4x^3y^3$$

$$D_xy = \frac{\sec^2(x + y) - 4x^3y^3}{3x^4y^2 - \sec^2(x + y)}$$

La expresión anterior ya no se puede simplificar más, por lo que la respuesta es

$$D_xy = \frac{\sec^2(x + y) - 4x^3y^3}{3x^4y^2 - \sec^2(x + y)}$$

Sugerencias para el estudiante

Utilice la derivación implícita para calcular la derivada en ecuaciones en donde la variable dependiente no está expresada explícitamente en términos de la variable independiente; o bien donde despejar la variable dependiente en términos de la variable independiente resulta ser muy complicado.