

PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la derivada $D_x y$ si

$$x^2 - 2x^2y^3 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Solución

Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$\begin{aligned} D_x [x^2 - 2x^2y^3 + y^2] &= D_x [(x^2 + y^2)^2] \\ D_x (x^2) - D_x (2x^2y^3) + D_x (y^2) &= 2(x^2 + y^2)D_x (x^2 + y^2) \\ 2x - (2x^2 \cdot 3y^2 D_x y + y^3 \cdot 4x) + 2y D_x y &= 2(x^2 + y^2)(2x + 2y D_x y) \end{aligned}$$

Ahora que se han calculado todas las derivadas hay que trasladar al lado izquierdo todos los términos que contienen la derivada, para poder despejarla

$$\begin{aligned} 2x - 6x^2y^2 D_x y - 4xy^3 + 2y D_x y &= 4x^3 + 4x^2y D_x y + 4xy^2 + 4y^3 D_x y \\ -6x^2y^2 D_x y + 2y D_x y - 4x^2y D_x y - 4y^3 D_x y &= 4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3 \\ D_x y (-6x^2y^2 + 2y - 4x^2y - 4y^3) &= 4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x y &= \frac{4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3}{-6x^2y^2 + 2y - 4x^2y - 4y^3} \\ &= \frac{2x(2x^2 + 2y^2 - 1 + 2y^3)}{2y(-3x^2y + 1 - 2x^2 - 2y^2)} \\ &= -\frac{x(2x^2 + 2y^2 + 2y^3 - 1)}{y(2x^2 + 2y^2 + 3x^2y - 1)} \end{aligned}$$
