PROBLEMA RESUELTO 5

Determine las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}}$$

Solución

Para obtener las asíntotas horizontales de una función, es necesario calcular los límites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Calculando el primero de los límites se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+4}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{4}{x}}{\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{4-0+0}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Por lo que la recta $y = \frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f.

Calculando el segundo límite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+4}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+4}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-3x+5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+5}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= -\frac{1+0}{\sqrt{4-0+0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Por lo que la recta $y = -\frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de la función f.

Es decir que la función tiene dos asíntotas horizontales que son

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}$$

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la función