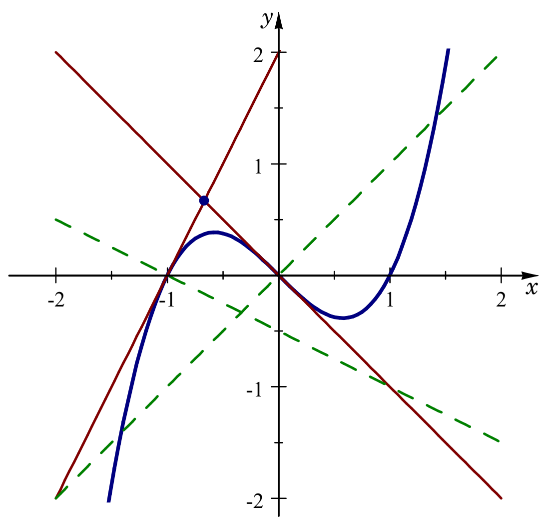
PROBLEMA RESUELTO 5

a. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^3 - x$ que pasan por el punto $\left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b. Hallar el punto de intersección de las rectas normales a las rectas tangentes del inciso (a)

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la función y la de las dos rectas tangentes que pasan por el punto $\left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Las rectas tangentes se dibujan en color rojo y las dos rectas normales en color verde con línea discontinua.



a. Sea (a,b) el punto de tangencia en la gráfica de $f(x) = x^3 - x$

La pendiente en cualquier punto de la curva está dada por la primera derivada

$$m = f'(x) = 3x^2 - 1$$

evaluando en el punto de tangencia: $f'(a) = 3a^2 - 1$

La pendiente entre dos puntos del plano se puede calcular utilizando la fórmula de pendiente entre dos puntos, en este caso los puntos (a,b) y $\left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$m = \frac{b - \frac{2}{3}}{a - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{b - \frac{2}{3}}{a + \frac{2}{3}}$$

Es claro que las dos pendientes corresponden a la recta tangente, por lo que estas son iguales. Igualando las pendientes se tiene

$$3a^2 - 1 = \frac{b - \frac{2}{3}}{a + \frac{2}{3}} \qquad \text{Ecuación i}$$

Siendo (a,b), el punto de tangencia, satisface la ecuación $f(x) = x^3 - x$ es decir:

$$b = a^3 - a \quad \text{Ecuación ii}$$

Resolviendo del sistema de ecuaciones mediante la sustitución de b de la ecuación (ii) en la ecuación (i), se tiene

$$3a^2 - 1 = \frac{a^3 - a - \frac{2}{3}}{a + \frac{2}{3}}$$

Por álgebra elemental:

$$(3a^2 - 1)\left(a + \frac{2}{3}\right) = a^3 - a - \frac{2}{3}$$

$$3a^3 - a + 2a^2 - \frac{2}{3} = a^3 - a - \frac{2}{3}$$

$$2a^3 + 2a^2 = 0$$

De donde se obtiene que $a = -1 \quad y \quad a = 0$

La recta tangente para $a = 1$ es

$$a = -1 \quad b = 0 \quad m = 3(-1)^2 - 1 = 2$$

$$y - 0 = 2(x - -1)$$

$$y = 2x + 2$$

La recta tangente para $a = 0$ es

$$a = 0 \quad b = 0 \quad m = 3(0)^2 - 1 = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 0)$$

$$y = -x$$

b. Las ecuaciones de las rectas normales correspondientes son:

$$a = -1 \quad b = 0 \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

$$2y + x + 1 = 0$$

$$a = 0 \quad b = 0 \quad m = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$y - 0 = x - 0$$

$$y = x$$

Encontrando el punto de intersección de las dos rectas normales

$$-0.5x - 0.5 = x$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Como $y = x$, se obtiene que $y = -\frac{1}{3}$

El punto de intersección es $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$