

PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Solución

Como la función es una expresión racional, debemos calcular el límite del numerador y del denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

Como el límite del numerador y el denominador tienden a 0, el límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas y utilizar algunas identidades trigonométricas.

Racionalizando el denominador se tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Cuando evaluamos este último límite se obtiene que el numerador tiende a 2, mientras que el denominador se aproxima a 0, por lo que el límite es del tipo infinito. Evaluando la expresión en un número cercano a cero por la izquierda, teniendo el cuidado de colocar la calculadora en el modo de radianes

$$\frac{1 + \cos(-0.001)}{\operatorname{sen}(0.001)} = -2000.0$$

El resultado anterior nos indica que la función esta tomando valores negativos muy grandes cuando x se aproxima a cero por la izquierda, es decir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = -\infty$$
