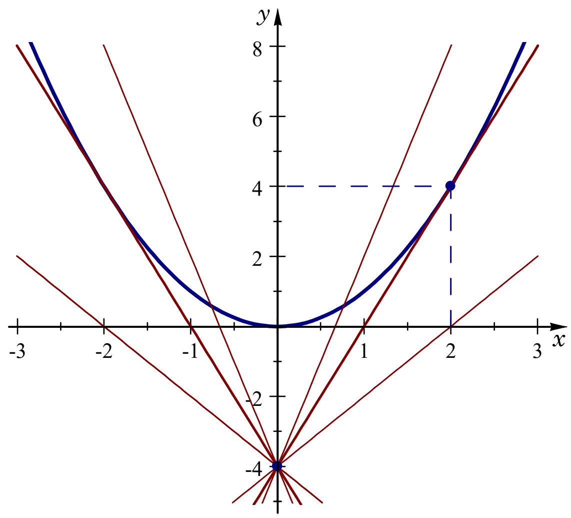
PROBLEMA RESUELTO 4

Para que valores de m la recta $y = mx - 4$ es tangente a la parábola $y = x^2$

Solución

La recta $y = mx - 4$ pasa por el punto $(0,-4)$, pues al evaluar $x = 0$ se tiene $y = m(0) - 4 = -4$. La figura siguiente muestra la gráfica de la parábola $y = x^2$, y varias rectas que pasan por el punto $(0,-4)$. Observe que sólo dos rectas son tangentes a la parábola.



La recta tangente a la parábola la intercepta en un solo punto, el cual debe satisfacer la ecuación de la recta tangente y la de la parábola. Si hacemos $x = c$ la coordenada en el eje x del punto de tangencia se tiene que el punto de tangencia es (c,c^2).

La pendiente de la recta $y = mx - 4$ es m , mientras que la pendiente de la curva $y = x^2$ en cualquier punto de ella está dado por la derivada

$$D_x(x^2) = 2x.$$

Como el punto de tangencia está sobre la parábola podemos evaluar $x = c$ en la derivada para obtener la pendiente en términos de c , es decir

$$m = 2c$$

Ahora el punto (c,c^2) se encuentra en la parábola pero también está en la recta tangente, por lo que se puede calcular la pendiente de la recta utilizando dos puntos de ella, estos puntos son $(0,-4)$ y (c,c^2).

$$m = \frac{c^2 - (-4)}{c - 0} = \frac{c^2 + 4}{c}$$

Igualando las dos expresiones para la pendiente y despejando c

$$2c = \frac{c^2 + 4}{c}$$
$$2c^2 = c^2 + 4$$
$$c^2 = 4$$
$$c = \pm\sqrt{4}$$
$$c = \pm 2$$

Es decir que $c = 2$ y $c = -2$. Por lo que los valores de m son

$$m = 2c = 2(2) = 4 \qquad \text{y} \qquad m = 2c = 2(-2) = -4$$