3.6 Función cuadrática

OBJETIVOS

- Dibujar la gráfica de una función cuadrática utilizando transformaciones.
- Encontrar las coordenadas del vértice de una función cuadrática.
- Dibujar la gráfica de una función cuadrática utilizando el vértice y sus intercepciones con los ejes de coordenadas.
- Resolver problemas de optimización en los cuales el modelo es una función cuadrática

Definición

Muchas aplicaciones pueden ser modeladas utilizando una **función cuadrática.** Aunque ya han sido tratadas superficialmente en algunos ejemplos, es en ésta sección es donde se estudian detalladamente.

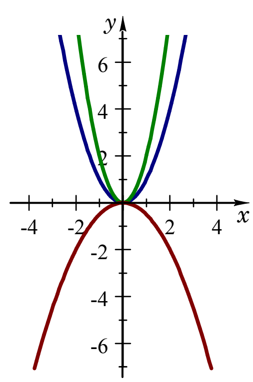
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función f de variable x, es llamada **función cuadrática**, si puede ser expresada en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

La gráfica de una función cuadrática es una parábola vertical que abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. Cuando $b = 0$ y $c = 0$, la función cuadrática se reduce a $f(x) = ax^2$, cuya gráfica es una parábola con vértice en el origen y el eje x es un eje de simetría. La siguiente figura muestra en color azul la gráfica de $y = x^2$, en color verde la gráfica de $y = 2x^2$ y en color rojo la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$



Un procedimiento para dibujar la gráfica consiste en completar cuadrados y utilizar los conceptos de transformación de las gráficas. También es aconsejable encontrar las intersecciones con los ejes de coordenadas para obtener mejores resultados.

Al completar cuadrados se obtiene la forma estándar de la función cuadrática, cuya definición se presenta a continuación

FORMA ESTÁNDAR DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, puede ser escrita en forma la forma estándar

$$f(x) = a(x-h)^2 + k, \quad a \neq 0$$

La gráfica de f es una parábola con vértice en (h,k). La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. La recta vertical $x = h$ es el eje de simetría de la parábola.

Ejemplo 1: Forma estándar de una función cuadrática

Encuentre la forma estándar y dibuje la representación gráfica de la función cuadrática cuya ecuación es

$$y = -2x^2 + 12x - 17$$

Solución

Agrupando los términos en x para completar cuadrados se tiene

$$y = (-2x^2 + 12x) - 17$$

$$y = -2(x^2 - 6x) - 17$$

Sumando 9 dentro del paréntesis en el lado derecho (realmente se está restando 18 ya que -2 afecta a cualquier número dentro del paréntesis) y sumando 18 en el mismo lado derecho. Luego factorizando el trinomio cuadrado perfecto se obtiene

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2 - 6x) - 17 \\ &= -2(x^2 - 6x + 9) - 17 + (2)(9) \\ &= -2(x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

De donde la parábola tiene vértice en el punto $(h,k) = (3,1)$ y abre hacia abajo.

Para dibujar la gráfica es muy útil encontrar las intersecciones con los ejes de coordenadas.

Las intersecciones con el eje x, o ceros de la función se obtienen haciendo $y = 0$ y despejando x.

$$\begin{aligned} 0 &= -2(x-3)^2 + 1 \\ 2(x-3)^2 &= 1 \\ (x-3)^2 &= \frac{1}{2} \\ x - 3 &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x &= 3 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por lo que la parábola intercepta al eje x en los puntos $\left(3 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right)$ y $\left(3 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right)$.

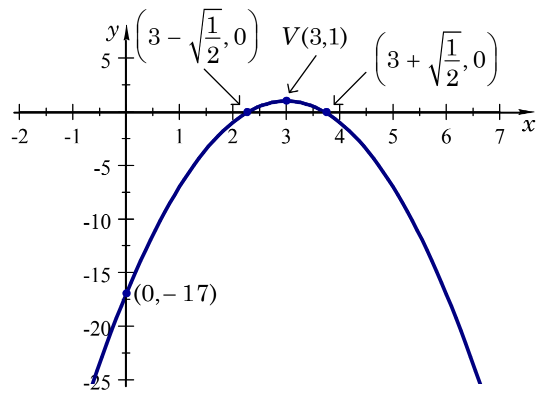
O dicho de otra forma los ceros o raíces de la función son $x = 3 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ y $x = 3 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Las intersecciones con el eje y se encuentra haciendo $x = 0$ y despejando y

$$y = -2(0-3)^2 + 1 = -18 + 1 = -17$$

Por lo que la parábola intercepta al eje y en el punto $(0,-17)$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función cuadrática



Ejemplo 2: Forma estándar de una parábola dado el vértice

Encuentre la ecuación estándar de la parábola que tiene vértice en el punto $(2,-4)$ y que pase por el punto $(6,3)$

Solución

Queremos encontrar una ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$. Como se conocen las coordenadas del vértice, se tiene

$$(h,k) = (2,-4)$$

Por lo que $h = 2$ y $k = -4$. Al sustituir estos valores en la forma estándar se tiene

$$\begin{aligned} y &= a(x-h)^2 + k \\ &= a(x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

Como el punto $(6,3)$ está en la parábola, se sustituyendo $x = 6$ y $y = 3$ en la ecuación y se despeja a

$$\begin{aligned} 3 &= a(6-2)^2 - 4 \\ 3 &= 16a - 4 \\ 16a &= 7 \\ a &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de a se obtiene la ecuación buscada

$$y = \frac{7}{16}(x-2)^2 - 4$$

Vértice de una parábola

Al completar cuadrados en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se obtienen las coordenadas del vértice, como se muestra a continuación

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + f\left(\frac{-b}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

El desarrollo anterior nos lleva a la siguiente propiedad de la función cuadrática

VÉRTICE DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

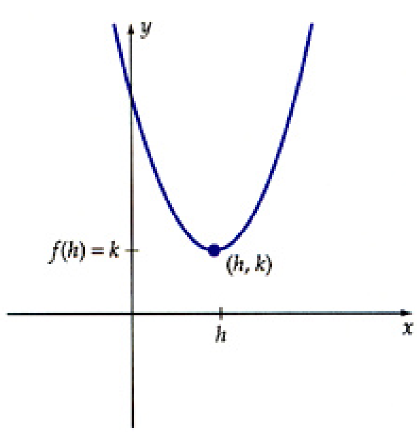
El vértice de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, tiene coordenadas $V(h,k)$, donde

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

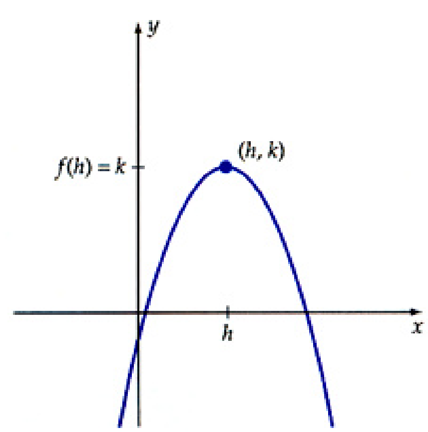
Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor máximo de la función.

Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y el valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor mínimo de la función.

La figura siguiente ilustra el valor máximo y el mínimo en una parábola



k es el mínimo valor de f



k es el máximo valor de f

Ejemplo 3: Vértice de una parábola

Dada la función cuadrática

$$f(x) = -5x^2 - 6x + 3$$

a. Utilice la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de f.

b. Utilice la fórmula del vértice para encontrar el valor máximo o mínimo de la función.

c. Dibuje la representación gráfica.

Solución

a. Al utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $-5x^2 - 6x + 3 = 0$, se obtienen las raíces de la función, es decir los puntos donde la gráfica intercepta al eje x.

Multiplicando ambos lados por -1 y luego usando la fórmula general

$$5x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(-3)}}{(2)(5)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 60}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{96}}{10} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{6}}{10}$$

$$x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

De donde las raíces de la función cuadrática son

$$x = \frac{-3 - 2\sqrt{6}}{5} \approx -1.58 \quad \text{y} \quad x = \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{5} \approx 0.39$$

b. La coordenada x del vértice es

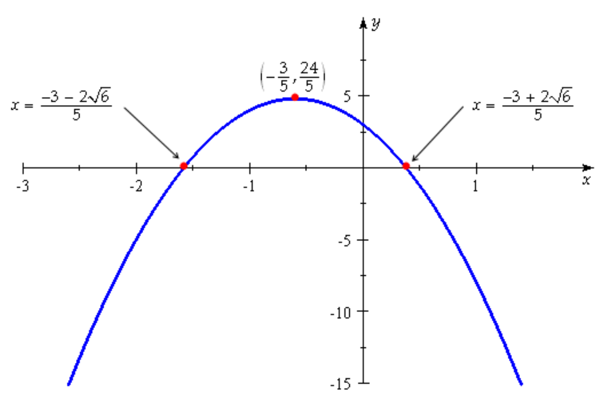
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2(-5)} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

La coordenada y del vértice es

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -5\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 6\left(-\frac{3}{5}\right) + 3 = -\frac{9}{5} + \frac{18}{5} + 3 = \frac{24}{5}$$

Por lo que el vértice se localiza en el punto $(h,k) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{24}{5}\right) \approx (-0.6, 4.8)$

Cómo la parábola abre hacia abajo el valor máximo es $y = \frac{24}{5}$. La figura siguiente muestra la gráfica de la parábola.

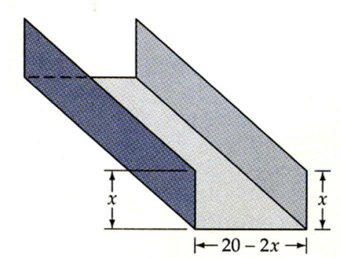


Aplicaciones

En muchas aplicaciones es necesario encontrar el máximo o mínimo de una función, si la función es una función cuadrática, éste se localiza en el vértice de la parábola. Utilizando la fórmula del vértice se puede encontrar el valor máximo o mínimo requerido.

Ejemplo 3: Capacidad máxima de un canal rectangular

Una lámina metálica de 20 pulgadas de ancho y 12 pies de largo será utilizada para construir un canal rectangular de 12 pies de largo, como se muestra en la figura. Determine el valor de x de tal forma que el canal tenga una capacidad máxima.



Solución

Puede observarse que el canal tendrá una capacidad máxima cuando el área de la sección transversal sea máxima, es decir cuando el área del rectángulo que tiene como base $20-2x$ y altura x alcance su valor máximo.

El área del rectángulo es

$$A = \text{base} \times \text{Altura}$$

$$A = (20-2x)(x)$$

$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

El dominio de ésta función está determinado por todos los valores que puede tomar x en el contexto del problema, dado que el ancho de la lámina es de 20 pulgadas, el valor de x debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a 10, pues se doblan hacia arriba dos lados de largo x. Observe también que, cualquier otro valor de x al evaluarlo en la función da como resultado un área negativa, lo cual no es posible ya que se trata del área de un rectángulo. Por lo tanto el dominio de la función es el intervalo $[0,10]$.

Para obtener el área máxima debemos localizar el vértice de la parábola. Usando la fórmula del vértice con $a=-2$ y $b=20$ se tiene

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-2)} = 5$$

Es decir que el área es máxima cuando la altura del canal es de 5 pulgadas. El área máxima es

$$A(5) = -2(5)^2 + 20(5) = -50 + 100 = 50$$

Por lo que el área máxima de la sección del canal es de 50 pulgadas cuadradas.

Ejercicios de la sección 3.6

En los ejercicios 1 a 10 complete cuadrados para obtener la forma estándar de la función cuadrática, obtenga las coordenadas del vértice y dibuje la gráfica.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1$

2. $f(x) = x^2 + 6x - 1$

3. $f(x) = x^2 - 8x$

4. $f(x) = x^2 - 3x$

5. $f(x) = x^2 + 5x - 1$

6. $f(x) = x^2 - 7x + 4$

7. $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

8. $f(x) = -x^2 - 5x - 5$

9. $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$

10. $f(x) = -4x^2 + 6x + 3$

En los ejercicios 11 a 20 encuentre los inerceptos con los ejes de coordenadas, utilice la fórmula del vértice para encontrar el vértice y dibuje la representación gráfica. Obtenga el valor máximo o el valor mínimo de la función.

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = 4x - x^2$

13. $f(x) = x^2 + 10$

14. $f(x) = 4 - 2x^2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

16. $f(x) = -x^2 - 4x - 2$

17. $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$

18. $f(x) = -3x^2 - 10x - 2$

19. $f(x) = 5x^2 + 6x + 3$

20 $f(x) = -4x^2 + x + 1$

En los ejercicios 21 a 30 resuelva el problema de máximos o mínimos.

21. El arco que sostiene un puente tiene forma parabólica cuya ecuación es

$$h(x) = -\frac{3}{64}x^2 + 27, \quad -24 \le x \le 24$$

Donde x es la distancia horizontal medida en pies desde el centro del puente.

a. ¿Cuál es la altura del arco 10 pies a la derecha del centro?

b. ¿A qué distancia del centro, la altura del arco es de 8 pies?

c. ¿Cuál es la altura máxima del arco que sostiene el puente?

22. Un bateador le pega a una pelota, la cual describe una trayectoria parabólica cuya ecuación es

$$h(x) = -\frac{3}{4000}x^2 + \frac{3}{10}x + 3$$

En donde h y x están en pies. Encuentre la altura máxima que alcanza la pelota.

23. Encuentre dos números reales positivos cuya suma sea 80 y cuyo producto sea máximo.

24. Encuentre dos números reales positivos cuya diferencia sea 120 y cuyo producto sea mínimo.

25. El perímetro de un rectángulo de base a y ancho b es 480 cm.

a. Escriba b en términos de a.

b. Escriba el área del rectángulo como una función de a.

c. Obtenga las dimensiones del rectángulo de área máxima.

26. Un alambre de 24 pulgadas de largo se dobla en forma de rectángulo con ancho x y longitud y.

a. Expresar y como función de x,

b. Determinar el área A del rectángulo como función de x,

c. Demostrar que el área A es máxima si el rectángulo es un cuadrado.

27. Un granjero que dispone de 750 pies de cerca desea cercar un terreno rectangular y después dividirlo en cuatro corrales con cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?

28. Un triángulo isósceles de base 2 centímetros se encuentra inscrito dentro de una circunferencia de radio x, de forma que sus vértices quedan sobre la circunferencia.

a. Halle el valor de x para que el área del triángulo sea 9 centímetros cuadrados.

b. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener x?

29. En una campaña promocional se venden 1000 artículos mensuales a Q50.00 cada uno. Cuando los empresarios consideran que los consumidores han aceptado el producto, deciden incrementar el precio para maximizar los ingresos. Si han detectado que por cada incremento de un quetzal en el precio, se venden 10 artículos menos, determine:

a. Una función que modele el ingreso mensual en términos del precio de venta x.

b. El precio que genera el máximo ingreso mensual.

c. El máximo ingreso mensual.

30. Una compañía de televisión por cable da servicio a 5,000 usuarios y cobre una tarifa de Q20 por mes. Un estudio de mercado indica que por cada quetzal menos en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Si $I(x)$ representa el ingreso mensual de la compañía,

a. Construya una función que modele el ingreso $I(x)$

b. Determine el precio que debe tener el servicio para que el ingreso de la compañía sea máximo.

c. Calcule el ingreso máximo.

31. Determine el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en un triángulo rectángulo con catetos 3 y 4 cm. Si dos lados del rectángulo están sobre los catetos.

32. El dueño de una casa quiere cercar un jardín rectangular adyacente a una carretera. La cerca junto a la carretera debe ser más robusta y cuesta Q5.00 por pie, pero la otra cerca cuesta solo Q3.00 por pie. El jardín debe tener un área de 1200 pies cuadrados.

a. Encuentre una función que modele el costo de la cerca del jardín.

b. Determine las dimensiones del jardín que reducen al mínimo el costo de la cerca.

33. Se dispone de 40 metros lineales de cerca para construir tres corrales iguales, a partir de encerrar un área rectangular y después dividirla. Si las divisiones entre corrales miden "x" metros, entonces:

a. Encuentre una función que modele el área de los tres corrales.

b. Si las divisiones no puede medir menos de 2 metros, establezca el dominio físico de la función.

c. Grafique la función.

d. ¿Cuáles son las dimensiones del área rectangular a encerrar, para obtener la mayor área de los tres corrales?

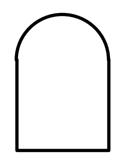
e. ¿Cuál es la menor área que es posible encerrar?

34. Un estadio tiene capacidad para 40 000 espectadores. Cuando se realizan conciertos el costo de cada boleto es de Q800 y la asistencia promedio ha sido de 10 000 personas. Según un estudio se ha determinado que por cada Q50 de incremento en el precio del boleto, dejan de asistir 750 personas.

a. Construya una función que establezca los ingresos totales en términos del precio del boleto.

b. ¿En cuántos quetzales se puede incrementar o reducir el valor actual del boleto para obtener el máximo ingreso posible?

35. Una ventana está formada por un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto como se muestra en la figura. Si el perímetro de la ventana es de 48 pies, obtenga las dimensiones de la misma de tal forma que el área total sea máxima.



36. Un alambre de 10 cm de largo se cortará en dos partes, con la primera de ellas se formará un cuadrado y con la segunda un círculo. Determine en donde debe cortarse el alambre de tal forma que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

37. Un alambre de 10 cm de largo se cortará en dos partes, con la primera de ellas se formará un cuadrado y con la segunda un triángulo equilátero. Determine en donde debe cortarse el alambre de tal forma que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

38. Un alambre de 10 cm de largo se cortará en dos partes, con la primera de ellas se formará un circulo y con la segunda un triángulo equilátero. Determine en donde debe cortarse el alambre de tal forma que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.