

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x)$$

Solución

Al intentar calcular este límite utilizando las reglas para evaluar el infinito se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) = \infty - \infty$$

El límite tiene forma indeterminada $\infty - \infty$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas que permitan utilizar las propiedades de los límites al infinito.

Racionalizando la expresión se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) \cdot \frac{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(9x^2 + ax) - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x} \end{aligned}$$

Ahora que ya se tiene una expresión racional, se multiplica el numerador y el denominador por $\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} + 3x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2 + ax}}{x} + \frac{3x}{x}} \end{aligned}$$

Como x tiende al infinito positivo se tiene que $x = \sqrt{x^2}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{\frac{9x^2 + ax}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{9 + \frac{a}{x}}} \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de los límites al infinito se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{9 + 0}} = \frac{a}{3}$$