

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \left[x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right]^{-5}$$

Solución

En este problema se debe calcular la derivada de una función que está compuesta por varias funciones compuestas, razón por la cual hay que poner mucha atención al uso de la regla de la cadena, la cual debe ser utilizada varias veces.

Se debe comenzar con la derivada de la potencia exterior -5

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x \left[x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right]^{-5} \\ &= -5 \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right)^{-6} \cdot D_x \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right) \end{aligned}$$

Observe que ahora hay que calcular la derivada de una resta de funciones, en donde la segunda función es una raíz cúbica compuesta.

$$f'(x) = -5 \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right)^{-6} \cdot \left[3x^2 - \frac{1}{3} \left(8 - (2x - x^3)^4 \right)^{-2/3} \cdot D_x \left(8 - (2x - x^3)^4 \right) \right]$$

Ahora solo hace falta derivar la resta de una constante con una función compuesta de potencia 4

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right)^{-6} \cdot \left[3x^2 - \frac{1}{3} \left(8 - (2x - x^3)^4 \right)^{-2/3} \cdot \left(-4(2x - x^3)^3 D_x(2x - x^3) \right) \right] \\ &= -5 \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right)^{-6} \cdot \left[3x^2 - \frac{1}{3} \left(8 - (2x - x^3)^4 \right)^{-2/3} \cdot \left(-4(2x - x^3)^3 (2 - 3x^2) \right) \right] \end{aligned}$$

Generalmente este tipo de derivadas es muy poco lo que se puede simplificar la respuesta.

$$f'(x) = -5 \left(x^3 - \sqrt[3]{8 - (2x - x^3)^4} \right)^{-6} \cdot \left[3x^2 + \frac{4}{3} (2x - x^3)^3 (2 - 3x^2) \left(8 - (2x - x^3)^4 \right)^{-2/3} \right]$$
