PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule el límite

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x}$$

Solución

Observe que x tiende a π. En los dos teoremas estudiados en esta sección x tiende a 0, es razonable pensar que lo mas apropiado es hacer una sustitución de tal forma que la nueva variable tienda a 0. Haciendo

$$u = x - \pi$$

Se obtiene que cuando x tiende a π u tiende a cero, además $x = u + \pi$. Expresando el límite en términos de u

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u + \pi)}$$

Utilizando la identidad para el seno de una suma de ángulos y simplificando

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\operatorname{sen} u \cos \pi + \cos u \operatorname{sen} \pi} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\operatorname{sen} u \cdot (-1) + \cos u \cdot (0)} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{u}{-\operatorname{sen} u}
\end{aligned}$$

Trasladando u al denominador y evaluando el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{u \to 0} \frac{1}{-\frac{\operatorname{sen} u}{u}} \\
&= \frac{\lim_{u \to 0} 1}{\lim_{u \to 0} \left(-\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right)} \\
&= \frac{1}{-1} \\
&= -1
\end{aligned}$$