PROBLEMA RESUELTO 3

Dada la función

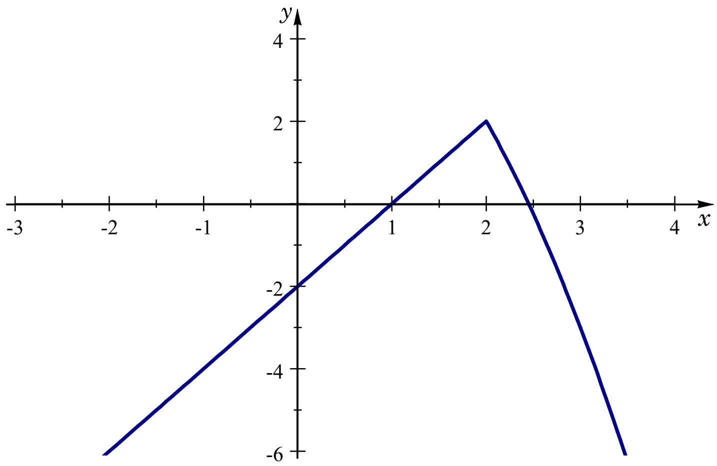
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si \quad x \le 2 \\ 6 - x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Dibuje la gráfica de la función.

b. Utilice la definición de derivada para determinar si la función es derivable en $x = 2$

Solución

a. La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura, se puede ver claramente que la función es continua en $x = 2$. Observe que la función tiene un pico en $x = 2$



b. para establecer si la función es derivable en $x = 2$, se debe calcular la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en 2.

Calculando la derivada por la izquierda

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Para evaluar este límite observe que h tiende a cero con valores negativos, por lo que $2 + h$ es un número menor que 2 y la función se debe evaluar en la expresión $2x - 2$

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[2(2+h) - 2\right] - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{4 + 2h - 2 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} (2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La derivada por la derecha en se calcula de forma similar, con la observación que $2+h$ ahora es un número mayor que 2 y por lo tanto se debe evaluar en la expresión $6-x^2$

$$
\begin{aligned}
f'_+(2) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left[6-(2+h)^2\right]-(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(6-4-4h-h^2)-(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-4h-h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h(4+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} -(4+h) \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Como la derivada por la izquierda no es igual a la derivada por la derecha se concluye que el límite no existe y por lo tanto la función no es derivable en $x=2$