

## PROBLEMA RESUELTO 3

---

Determine los valores de  $a$  y  $b$  de tal forma que la función dada sea continua en todos los reales. Dibuje la gráfica de la función resultante

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & \text{si } x < -2 \\ 3ax - 7b & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

### Solución

---

Para que la función sea continua en  $-2$ , el límite por la izquierda y el límite por la derecha deben ser iguales

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

Al calcular los límites y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} 7b &= 6 - 12a & \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x + 6a) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (3ax - 7b) \\ b &= \frac{6 - 12a}{7} & 3(-2) + 6a &= 3a(-2) - 7b \\ & & 12a + 7b &= 6 \end{aligned}$$

De la misma forma, para que la función sea continua en  $3$ , el límite por la izquierda y el límite por la derecha deben ser iguales

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Al calcular los límites y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} (3ax + 7b) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 12b) \\ 3a(3) - 7b &= (3) - 12b \\ 9a + 5b &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrán los valores de  $a$  y  $b$ . Despejando  $b$  en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene

$$7b = 6 - 12a$$

$$b = \frac{6 - 12a}{7}$$

$$9a + 5b = 3$$

$$9a + 5\left(\frac{6 - 12a}{7}\right) = 3$$

$$63a + 30 - 60a = 21$$

$$3a = -9$$

$$a = -3$$

$$b = \frac{6 - 12a}{7} = \frac{6 - 12(-3)}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Entonces los valores que hacen que la función sea continua son  $a = -3$  y  $b = 6$

La función queda de la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 18 & \text{si } x < -2 \\ -9x - 42 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ x - 72 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica resultante, donde se ve claramente que es continua en todo número

