2.3 Derivadas de funciones trigonométricas

INTRODUCCIÓN

En esta sección se estudian las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Las fórmulas para la derivada de la función seno y de la función coseno se obtienen a partir de la definición de derivada y de los dos límites trigonométricos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Las formulas de las otras cuatro funciones se pueden obtener utilizando las identidades fundamentales y las fórmulas para derivar productos y cocientes.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Calcular la derivada de funciones que contienen funciones trigonométricas.
- Resolver problemas que involucran rectas tangentes y perpendiculares a funciones trigonométricas.
- Resolver problemas en donde la derivada es interpretada como una razón de cambio.

Reglas de derivación

Las fórmulas para derivar las 6 funciones trigonométricas son las siguientes

$$\begin{array}{ll}
D_x[\operatorname{sen} x] = \cos x & D_x[\operatorname{sen} u] = \cos u \cdot D_x u \\
D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x & D_x[\cos u] = -\operatorname{sen} u \cdot D_x u \\
D_x[\tan x] = \sec^2 x & D_x[\tan u] = \sec^2 u \cdot D_x u \\
D_x[\cot x] = -\csc^2 x & D_x[\cot u] = -\csc^2 u \cdot D_x u \\
D_x[\sec x] = \sec x \tan x & D_x[\sec u] = \sec u \tan u \cdot D_x u \\
D_x[\csc x] = -\csc x \cot x & D_x[\csc u] = -\csc u \cot u \cdot D_x u
\end{array}$$

Ejemplo 1: Derivada de la función seno

Utilice la definición de derivada para deducir la fórmula de la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$

Solución

La definición de derivada establece que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Al aplicar la definición a la función seno se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$$

Utilizando la identidad para una suma de ángulos y ordenando las expresiones

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cos h + \operatorname{sen}h\cos x - \operatorname{sen}x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h\cos x - \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x\cos h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h\cos x - \operatorname{sen}x(1-\cos h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}h\cos x}{h} - \frac{\operatorname{sen}x(1-\cos h)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\cos x - \frac{1-\cos h}{h}\cdot\operatorname{sen}x\right) \end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar el límite utilizando los límites ya conocidos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\cdot\cos x\right) - \lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos h}{h}\cdot\operatorname{sen}x\right) \\ &= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h} - \operatorname{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} \\ &= \cos x\cdot(1) - \operatorname{sen}x\cdot(0) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Concluyendo que la derivada de la función seno es

$$D_x[\operatorname{sen}x] = \cos x$$

Ejemplo 2: Derivada de la función tangente

Utilice identidades trigonométricas y la derivada de un cociente para deducir la fórmula de la derivada de la función $\tan x$

Solución

Usando identidades la función tangente se puede expresar como

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

Ahora se puede utilizar la derivada de un cociente, dando por hecho que ya se saben las derivadas de la función seno y coseno.

$$\begin{aligned} D_x(\tan x) &= D_x\left[\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right] \\ &= \frac{\cos x\cdot D_x(\operatorname{sen}x) - \operatorname{sen}x\cdot D_x(\cos x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \operatorname{sen}x\cdot(-\operatorname{sen}x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} \end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$\begin{aligned} D_x(\tan x) &= \frac{1}{(\cos x)^2} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Se concluye que

$$D_x[\tan x] = \sec^2 x$$

Sugerencias para el estudiante

Para calcular la derivada de una función que contiene funciones trigonométricas siga las recomendaciones siguientes:

1. Observe la función que va a derivar, determinando si es una suma, un producto, un cociente o una función compuesta. Utilice la regla apropiada para calcular la derivada. Cuando derive funciones trigonométricas utilice la fórmula correspondiente. Si el ángulo está compuesto utilice la regla de la cadena.

2. Si la función es un cociente o producto de funciones compuestas, utilice la regla del cociente o del producto. No hay que olvidarse de usar la regla de la cadena al derivar los factores. Cuando derive funciones trigonométricas utilice la fórmula correspondiente. Si el ángulo está compuesto utilice la regla de la cadena.

3. Si la función es un producto o cociente, todo elevado a una potencia. Utilice primero la regla de la potencia para derivar el exponente y luego multiplique por la derivada del producto o del cociente. Cuando derive funciones trigonométricas utilice la fórmula correspondiente. Si el ángulo está compuesto utilice la regla de la cadena.