2.2 Reglas de derivación

INTRODUCCIÓN

En la sección anterior el lector aprendió a calcular la derivada de una función utilizando límites. Si bien el cálculo de derivadas por medio de la definición es importante pues permite comprender el concepto de derivada, tiene el inconveniente de involucrar cálculos algebraicos que en muchas funciones resultan muy complicados de efectuar.

Las reglas o fórmulas de derivación, estudiadas en ésta sección facilitan significativamente el cálculo de derivadas ya que en ellas no se utiliza la definición de límite y prácticamente, hay reglas de derivación para cualquier función que se quiera derivar.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Calcular la derivada de funciones algebraicas que contienen sumas, restas, productos y cocientes.
- Calcular la derivada de funciones algebraicas compuestas.
- Calcular derivadas de orden superior.
- Resolver problemas que involucran rectas tangentes y perpendiculares a funciones algebraicas.
- Resolver problemas en donde la derivada es interpretada como una razón de cambio

Formas en que se puede representar la derivada

El cálculo de la derivada de una función es un proceso que requiere de la aplicación de una o más reglas de derivación y luego de operaciones algebraicas que permiten simplificar la expresión resultante. Para representar en forma apropiada los cálculos, se suele representar la derivada de una función de diversas formas.

Si $y = f(x)$ es una función de variable x, la derivada $f'(x)$ se puede representar como

$$f'(x) = y' = D_x[f(x)] = D_x y = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{dy}{dx}$$

Todas las formas son equivalentes y se recomienda utilizar las formas más simples, siempre y cuando no produzcan ninguna confusión en cuanto a cual es la variable independiente y cual la variable dependiente.

Reglas de derivación

Regla 1: Regla de la constante

La derivada de una función constante es 0, es decir si c es un número real, entonces

$$D_x[c] = 0$$

Regla 2: Derivada de la función identidad

La derivada de la función $f(x) = x$ es 1, es decir

$$D_x[x] = 1$$

Regla 3: La regla de la potencia

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$D_x\left[x^n\right] = nx^{n-1}$$

Regla 4: Multiplicación por una constante

Si f es una función derivable y c es un número real, entonces

$$D_x[cf(x)] = cD_x[f(x)]$$

es decir que se puede derivar la función y multiplicarla por la constante c.

Regla 5: Regla de la suma y diferencia de funciones

Si f y g son dos funciones derivables, entonces la derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas y la derivada de la diferencia de las funciones es la diferencia de las derivadas, es decir

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)]$$

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x[f(x)] - D_x[g(x)]$$

Regla 6: Regla del producto

Si f y g son dos funciones derivables, su producto es derivable. La derivada es a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera, es decir

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x[g(x)] + g(x)D_x[f(x)]$$

Regla 7: Regla del cociente

Si f y g son funciones derivables, el cociente f/g es derivable para todos los valores de x tales que $g(x) \neq 0$. La derivada es el denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador, es decir

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x[f(x)] + f(x)D_x[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Regla 8: La regla de la cadena

Si f y g son funciones derivables, entonces la función compuesta $y = f(g(x))$ es derivable. La derivada se obtiene derivando la función f y evaluándola en la función g, multiplicando todo por la derivada de la función g, es decir

$$D_x[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Regla 9: La regla general de las potencias

Si f es una función derivable y n es un número racional, la función compuesta $y = (f(x))^n$ es derivable. La derivada se obtiene derivando la potencia y evaluándola en la función f, multiplicando el resultado por la derivada de la función f, es decir

$$D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot D_x[f(x)]$$

Derivadas de orden superior

La derivada de una función $y = f(x)$ es a su vez otra función, que se representa como $y' = f'(x)$. Al usar las reglas de derivación para calcular la derivada de la derivada, se dice que se está calculando la segunda derivada, la cual se representa como $y'' = f''(x)$. Continuando con este proceso es posible calcular la tercera derivada, la cuarta derivada, etc., llamadas derivadas de orden superior. La tabla siguiente muestra la forma en que se representan las derivadas de orden superior para las primeras cuatro, en sus distintas nomenclaturas.

Primera derivada	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
Segunda derivada	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
Tercera derivada	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
Cuarta derivada	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$

Las derivadas de orden superior se interpretan de la misma forma que la primera derivada, es decir que dada una función $y = f(x)$, la primera derivada se interpreta como la razón de cambio de y con respecto a x (como cambia y al variar x). De la misma forma la segunda derivada se interpreta como la razón de cambio de y' con respecto a x (como cambia la derivada al variar x).

Ejemplo 1: Uso de la regla de la potencia

En este ejemplo se utiliza la regla de la potencia para calcular la derivada de las funciones indicadas

a. $f(x) = 4x^5$ **b.** $y = \frac{7x^2}{3}$ **c.** $g(x) = \frac{15}{2\sqrt[4]{x^3}}$

Solución

a. Para calcular la derivada de la función $f(x) = 4x^5$ primero se utiliza la regla 4 para separar la constante

$$D_x\left[4x^5\right] = 4D_x\left[x^5\right]$$

Una vez que se ha separado la constante se usa la regla de la potencia, bajando el exponente como factor y restando 1 a el exponente

$$D_x\left[4x^5\right] = 4D_x\left[x^5\right] = 4\left(5x^{5-1}\right) = 4(5x^4)$$

Finalmente se simplifica el resultado multiplicando 4 por 5

$$D_x\left[4x^5\right] = 4(5x^4) = 20x^4$$

En la práctica la derivada anterior se calcula rápidamente, multiplicando la constante 4 por el exponente 5 y restando 1 mentalmente al exponente, es decir

$$D_x\left[4x^5\right] = 20x^4$$

b. Para derivar la función $y = \frac{7x^2}{3}$ observe que la constante $\frac{7}{3}$ está multiplicando a la potencia x^2, por lo que la derivada se calcula fácilmente multiplicando la constante por el exponente de la potencia y restando 1 al exponente

$$D_x\left[\frac{7x^2}{3}\right] = D_x\left[\frac{7}{3}x^2\right] = \left(\frac{7}{3}\right)(2)x = \frac{14}{3}x$$

c. Para calcular la derivada de la función $g(x) = \dfrac{15}{2\sqrt[4]{x^3}}$ usando la regla de la potencia primero se debe expresar el radical como exponente fraccionario usando la definición de exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

También se utilizará la definición de exponente negativo para trasladar potencia en el denominador al numerador

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Ahora se puede calcular la derivada

$$D_x\left(\frac{15}{2\sqrt[4]{x^3}}\right) = D_x\left(\frac{15}{2\,x^{3/4}}\right) = D_x\left(\frac{15}{2}x^{-3/4}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-7/4}$$

$$= -\frac{45}{8}x^{-7/4}$$

El exponente $-7/4$ resulta de la resta $-\dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{7}{4}$. La respuesta puede simplificarse aun más trasladando la potencia al denominador con exponente positivo

$$D_x\left(\frac{15}{2\sqrt[4]{x^3}}\right) = -\frac{45}{8}x^{-7/4} = -\frac{45}{8x^{7/4}}$$

Ejemplo 2: Calculando la derivada de sumas y restas de funciones

En éste ejemplo se ilustra el uso de las reglas 4 y 5 para calcular la derivada de las siguientes funciones

a. $y = 4x^4 - 5x^3 - 2x + 20$

b. $p(x) = \dfrac{x^8}{8} - \dfrac{8}{x^8} - 100$

c. $f(q) = \sqrt{q}\left(q^2 - 3q + 4\right)$

Solución

a. Para calcular la derivada de sumas o restas se suman o restan las derivadas y luego se procede como en los ejemplos del caso 1

$$D_x y = D_x\left(4x^4 - 5x^3 - 2x + 20\right)$$

$$= D_x(4x^4) - D_x(5x^3) - D_x(2x) + D_x(20)$$

$$= 16x^3 - 15x^2 - 2 + 0$$

$$= 16x^3 - 15x^2 - 2$$

Observe que la derivada de $2x$ es 2 ya que la derivada de x es 1

b. En éste caso trasladamos la potencia en el denominador con exponente negativo al numerador y derivamos como en el inciso anterior

$$\begin{aligned}
D_x\left(p(x)\right) &= D_x\left(\frac{x^8}{8}-\frac{8}{x^8}-100\right)\\
&= D_x\left(\frac{x^8}{8}\right)-D_x\left(\frac{8}{x^8}\right)-D_x(100)\\
&= D_x\left(\frac{x^8}{8}\right)-D_x\left(8x^{-8}\right)-D_x(100)\\
&= \frac{8x^7}{8}-\left(-64x^{-9}\right)-0\\
&= x^7+64x^{-9}\\
&= x^7+\frac{64}{x^9}
\end{aligned}$$

c. Para calcular la derivada de la función $f(q)=\sqrt{q}\left(q^2-3q+4\right)$ se expresa la raíz como exponente fraccionario y luego se desarrolla el producto; (aunque también es posible utilizar la fórmula del producto como en el caso 3). Recuerde que para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes

$$\begin{aligned}
D_q\left(f(q)\right) &= D_q\left(\sqrt{q}\left(q^2-3q+4\right)\right)\\
&= D_q\left(q^{1/2}\left(q^2-3q+4\right)\right)\\
&= D_q\left(q^{5/2}-3q^{3/2}+4q^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

Ahora se deriva la expresión resultante usando la regla de la suma y de la potencia. Note que la variable independiente es q por lo que se debe derivar respecto a q y no respecto a x

$$\begin{aligned}
D_q\left(f(q)\right) &= D_q\left(q^{5/2}-3q^{3/2}+4q^{1/2}\right)\\
&= \frac{5}{2}q^{3/2}-\frac{9}{2}q^{1/2}+2q^{-1/2}\\
&= \frac{5}{2}q^{3/2}-\frac{9}{2}q^{1/2}+\frac{2}{q^{1/2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Usando las reglas del producto y del cociente

En este ejemplo se utilizan las reglas del producto y del cociente para calcular la derivada de las funciones siguientes

a. $f(x)=(5-2x^2)(x^3+x)$

b. $g(p)=\dfrac{6p^2+1}{p^4}$

c. $c(x)=\dfrac{x^3-3x^2+20}{20x^2-10}$

Solución

a. Aunque este problema también puede resolverse desarrollando el producto y luego usando la regla de la suma, se resolverá usando la regla del producto para ilustrar el uso de la misma

$$f'(x) = D_x\left[(5 - 2x^2)(x^3 + x)\right]$$
$$= (5 - 2x^2)D_x(x^3 + x) + (x^3 + x)D_x(5 - 2x^2)$$
$$= (5 - 2x^2)(3x^2 + 1) + (x^3 + x)(-4x)$$

Una vez calculada la derivada se desarrollan productos y se suman términos semejantes para simplificar la respuesta

$$f'(x) = (5 - 2x^2)(3x^2 + 1) + (x^3 + x)(-4x)$$
$$= 15x^2 + 5 - 6x^4 - 2x^2 - 4x^4 - 4x^2$$
$$= -10x^4 + 9x^2 + 5$$

b. Utilizando la regla del cociente y derivando con respecto a p

$$g'(p) = D_p\left(\frac{6p^2 + 1}{p^4}\right) = \frac{(p^4)D_p(6p^2 + 1) - (6p^2 + 1)D_p(p^4)}{(p^4)^2}$$
$$= \frac{(p^4)(12p) - (6p^2 + 1)(4p^3)}{p^8}$$

Simplificando la respuesta anterior

$$g'(p) = \frac{12p^5 - 24p^5 - 4p^3}{p^8} = \frac{-12p^5 - 4p^3}{p^8}$$
$$= -\frac{12p^5 + 4p^3}{p^8} = -\frac{4p^3(3p^2 + 1)}{p^8}$$
$$= -\frac{4(3p^2 + 1)}{p^5}$$

c. Usando la regla del cociente como en el inciso anterior

$$c'(x) = D_x\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 20}{20x^2 - 10}\right)$$
$$= \frac{(20x^2 - 10)D_x(x^3 - 3x^2 + 20) - (x^3 - 3x^2 + 20)D_x(20x^2 - 10)}{(20x^2 - 10)^2}$$
$$= \frac{(20x^2 - 10)(3x^2 - 6x) - (x^3 - 3x^2 + 20)(40x)}{(20x^2 - 10)^2}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene

$$c'(x) = \frac{60x^4 - 120x^3 - 30x^2 + 60x - 40x^4 + 120x^3 - 800x}{(20x^2 - 10)^2}$$
$$= \frac{20x^4 - 30x^2 - 740x}{(20x^2 - 10)^2}$$

Observe que en el proceso de simplificación no se desarrolla el cuadrado del denominador.

Ejemplo 4: Usando la regla de la cadena

En este ejemplo se ilustra el uso de la regla de la regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones dadas

a. $y = (4x - 5)^4$

b. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5 - 3x^2}}$

c. $G(q) = (3q - 2)^3(q^2 + 9)^4$

d. $h(x) = \left(\dfrac{3x}{1 - x^2}\right)^8$

Solución

a. Al usar la regla de la cadena el estudiante debe tener claro que está derivando una función compuesta. En este caso la función interior es $u = 4x - 5$, mientras que la función exterior es $f(u) = u^4$. Al derivar una función usando la regla de la cadena primero se deriva la función exterior que en el ejemplo es u^4, siendo su derivada $4u^3 = 4(4x - 5)^3$. Este resultado se debe multiplicar por la derivada de la función interior $u = 4x - 5$, que es $D_x(4x - 5) = 4$. El uso de la regla de la cadena se resume como sigue

$$\begin{aligned} y' &= D_x\left[(4x - 5)^4\right] \\ &= 4(4x - 5)^3 D_x(4x - 5) \\ &= 4(4x - 5)^3(4) \\ &= 16(4x - 5)^3 \end{aligned}$$

b. En este caso se recomienda expresar el radical como exponente fraccionario y trasladarlo al numerador de la fracción con exponente negativo para evitar el uso de la regla del cociente

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{5 - 3x^2}} = \frac{2}{(5 - 3x^2)^{1/2}} = 2\left(5 - 3x^2\right)^{-1/2}$$

Ahora se usa la regla de la cadena, derivando primero la potencia negativa y luego multiplicando por la derivada de la función dentro del paréntesis

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(2\left(5 - 3x^2\right)^{-1/2}\right) \\ &= (2)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(5 - 3x^2\right)^{-3/2} D_x\left(5 - 3x^2\right) \\ &= -\left(5 - 3x^2\right)^{-3/2}(-6x) \\ &= 6x\left(5 - 3x^2\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

c. Para calcular la derivada de la función $G(q) = (3q - 2)^3(q^2 + 9)^4$ observe que hay que usar la regla del producto combinada con la regla de la cadena al derivar las potencias

$$\begin{aligned} G'(q) &= D_q\left[(3q-2)^3(q^2+9)^4\right] \\ &= (3q-2)^3 D_q(q^2+9)^4 + (q^2+9)^4 D_q(3q-2)^3 \\ &= (3q-2)^3(4)(q^2+9)^3 D_q(q^2+9) + (q^2+9)^4(3)(3q-2)^2 D_q(3q-2) \\ &= (3q-2)^3(4)(q^2+9)^3(2q) + (q^2+9)^4(3)(3q-2)^2(3) \end{aligned}$$

Una vez que se ha completado el proceso de derivación se simplifica la respuesta, comenzando por ordenar la expresión

$$G'(q) = (8q)(3q-2)^3(q^2+9)^3 + 9(3q-2)^2(q^2+9)^4$$

Como la expresión tiene potencias grandes, no se recomienda desarrollar productos, es mejor utilizar factorización. Observe que hay factor común $(3q-2)^2$ y $(q^2+9)^3$

$$\begin{aligned} G'(q) &= (3q-2)^2(q^2+9)^3\left[8q(3q-2)+9(q^2+9)\right] \\ &= (3q-2)^2(q^2+9)^3\left[24q^2-16q+9q^2+81\right] \\ &= (3q-2)^2(q^2+9)^3\left[33q^2-16q+81\right] \end{aligned}$$

d. En este último ejemplo se ilustra el uso de la regla del cociente en combinación con la regla de la cadena

$$\begin{aligned} h'(x) &= D_x\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^8 \\ &= 8\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^7 \cdot D_x\left(\frac{3x}{1-x^2}\right) \\ &= 8\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^7 \cdot \frac{(1-x^2)D_x(3x)-(3x)D_x(1-x^2)}{(1-x^2)^2} \\ &= 8\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^7 \cdot \frac{(1-x^2)(3)-(3x)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= 8\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^7 \cdot \frac{3-3x^2+6x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= 8\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^7 \cdot \frac{3+3x^2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

La respuesta anterior ya está bastante simplificada, pero puede simplificarse aún más si se observa que la potencia 7 se puede aplicar al numerador y denominador de la fracción

$$\begin{aligned} h'(x) &= 8\frac{(3x)^7}{(1-x^2)^7} \cdot \frac{3+3x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{8(3x)^7(3+3x^2)}{(1-x^2)^9} \\ &= \frac{24(3x)^7(1+x^2)}{(1-x^2)^9} \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Derivadas de orden superior

En este ejemplo se ilustra el procedimiento para calcular la segunda derivada de las funciones propuestas, en el inciso b se hace una interpretación del resultado obtenido.

a. Si $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$, calcule la segunda derivada y''

b. Si $f(x) = 12x^2 - 2x^3 - 2x$, calcule la tasa de cambio de la primera derivada cuando $x = 1$.

Solución

a. Para calcular la segunda derivada se debe calcular la primera derivada usando la regla del cociente

$$y' = D_x\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) = \frac{x^2 D_x(2x+1) - (2x+1)D_x(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(2) - (2x+1)(2x)}{x^4} = \frac{2x^2 - 4x^2 - 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-2x(x+1)}{x^4}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{x^3}$$

Ahora se puede calcular la segunda derivada

$$y'' = D_x\left(\frac{-2x-2)}{x^3}\right) = \frac{x^3 D_x(-2x-2) - (-2x-2)D_x(x^3)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{x^3(-2) - (-2x-2)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^3 + 6x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{4x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2x^2(2x+3)}{x^6}$$

$$= \frac{2(2x+3)}{x^4}$$

b. Observe que la primera derivada es la tasa de cambio de la función, y la segunda derivada es la tasa de cambio de la primera derivada, por lo tanto para resolver éste problema debemos calcular la segunda derivada y evaluarla en $x = 1$

$$f'(x) = D_x\left(12x^2 - 2x^3 - 2x\right)$$

$$= 24x - 6x^2 - 2$$

$$f''(x) = D_x\left(24x - 6x^2 - 2\right)$$

$$= 24 - 12x$$

Ahora se evalúa en $x = 1$ para obtener el resultado buscado

$$f''(1) = 24 - 12(1) = 12$$

Este resultado, geométricamente significa que la pendiente está aumentando a razón de 12 unidades cuando x aumenta una unidad a partir de $x = 1$.

Sugerencias para el estudiante

Dada una función $y = f(x)$, para calcular la derivada utilizando las reglas derivación siga las recomendaciones siguientes:

1. Observe la función que va a derivar, determinando si es una suma, un producto, un cociente o una función compuesta. Utilice la regla apropiada para calcular la derivada.

2. Si la función es un cociente o producto de funciones compuestas, utilice la regla del cociente o del producto. No hay que olvidarse de usar la regla de la cadena al derivar los factores.

3. Si la función es un producto o cociente, todo elevado a una potencia. Utilice primero la regla de la potencia para derivar el exponente y luego multiplique por la derivada del producto o del cociente.

El cálculo de derivadas de orden superior consiste en calcular la derivada de una función que ya es la derivada de otra. En el caso de la segunda derivada, se puede interpretar como la razón de cambio de la primera derivada; es decir que podemos usar la segunda derivada para saber si la primera derivada está aumentando o disminuyendo y con qué intensidad.