2.1 El concepto de derivada

INTRODUCCIÓN

El concepto de límite, estudiado en la unidad anterior, es fundamental en el estudio del cálculo ya que permite resolver dos de los problemas clásicos del Cálculo: "*El problema de la recta tangente*" y "*El problema del área bajo una curva".* En esta sección se aborda el concepto de derivada de una función, su interpretación como la pendiente de la recta tangente a una curva y su interpretación como razón de cambio; así como la definición de derivada como una función.

OBJETIVOS

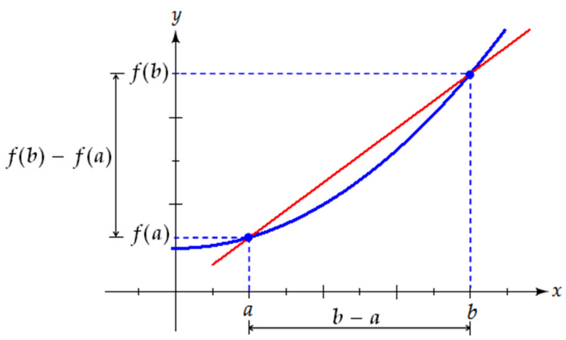
Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Hallar la pendiente entre dos puntos de una función, e interpretarla como la razón de cambio promedio.
- Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos utilizando el concepto de límite.
- Encontrar la derivada de una función utilizando la definición.
- Resolver problemas relacionados con las ciencias económicas en donde la derivada es interpretada como una razón de cambio instantánea.

Pendiente de la recta tangente a una curva

Si $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ son dos puntos que se encuentran en la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces la pendiente de la recta secante que pasa por dichos puntos está dada por

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Si en la expresión de la pendiente entre dos puntos $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ se reemplaza $h = b - a$, entonces se obtiene que $b = a + h$ y la pendiente puede expresarse como

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La figura 2 muestra una función y tres rectas secantes para distintos valores de h. Observe que cuando h tiende a 0, la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$

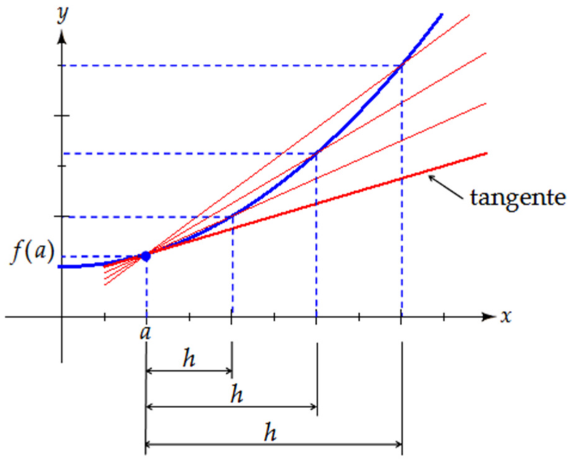


Figura 2

Del razonamiento anterior y usando el concepto de límite se obtiene que la pendiente de la recta tangente en $x = a$ está dada por

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Ejemplo 1: Ecuación de una recta tangente

Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

a. Encontrar la pendiente de la recta secante para los intervalos de x indicados:
i. $[2,3]$, ii. $[2,2.5]$ y iii. $[2,2.1]$

b. Encontrar la pendiente de la recta tangente en $x = 2$.

c. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 2$.

d. Dibujar la gráfica de la función y la recta tangente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares.

Solución

a. La pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de una curva se encuentra utilizando la fórmula de pendiente

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para el intervalo $[2,3]$ se tiene

$$m = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\left[-(3)^2 + 2(3) + 2\right] - \left[-(2)^2 + 2(2) + 2\right]}{1}$$

$$= \frac{(-1) - (2)}{1} = -3$$

Para el intervalo $[2,2.5]$ se tiene

$$m = \frac{f(2.5)-f(2)}{2.5-2} = \frac{\left[-(2.5)^2+2(2.5)+2\right]-\left[-(2)^2+2(2)+2\right]}{0.5}$$
$$= \frac{(0.75)-(2)}{0.5} = -2.5$$

Para el intervalo $[2,2.1]$ se tiene

$$m = \frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2} = \frac{\left[-(2.1)^2+2(2.1)+2\right]-\left[-(2)^2+2(2)+2\right]}{0.1}$$
$$= \frac{(1.79)-(2)}{0.1} = -2.1$$

Observe que los valores de la pendiente se están aproximando a -2 cuando se va reduciendo la longitud del intervalo.

b. Para calcular el valor exacto de la pendiente en $x = a$ se tiene que calcular el límite

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Donde la función es $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

Para evaluar $f(a+h)$ se sustituye $a+h$ por x en la función, es decir

$$f(a+h) = -(a+h)^2 + 2(a+h) + 2$$

Reemplazando ésta expresión y desarrollando las operaciones algebraicas se tiene que la derivada está dada por el límite siguiente

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a+h)^2+2(a+h)+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$

Ahora bien, el límite que resulta cuando se utiliza la definición de derivada siempre es da la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, razón por la cual es necesario efectuar operaciones algebraicas para poder calcularlo. En este caso se desarrollan los productos entre paréntesis y se suman términos semejantes

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a+h)^2+2(a+h)+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(a^2+2ah+h^2)+2a+2h+2\right]-\left[-a^2+2a+2\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-a^2-2ah-h^2+2a+2h+2+a^2-2a-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2ah-h^2+2h}{h}$$

Factorizando h en el numerador y simplificando se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(-2a-h+2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(-2a-h+2)$$
$$= -2a-(0)+2$$
$$= -2a+2$$

De donde la pendiente de la recta tangente de la curva $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en $x = a$ es $m = -2a + 2$

b. La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ se obtiene evaluando $x = 2$ en la expresión para la pendiente

$$m = -2a + 2 = -2(2) + 2 = -2$$

c. Para obtener la ecuación de la recta tangente en $x = 2$, se necesita la pendiente y un punto, la pendiente es $m = -2$ y el punto se encuentra evaluando $x = 2$ en la función

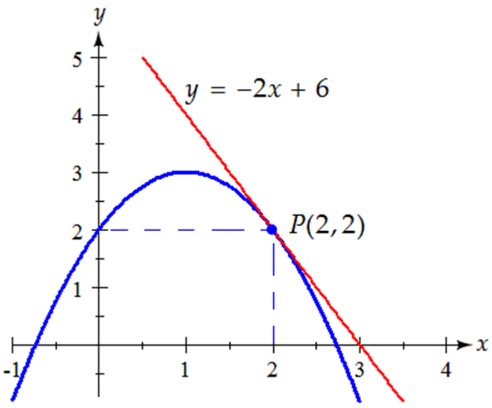
$$f(2) = -(2)^2 + 2(2) + 2 = 2$$

Entonces el punto de tangencia es $P = (2,2)$

Utilizando la fórmula punto pendiente para encontrar la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 2 &= -2(x - 2) \\ y - 2 &= -2x + 4 \\ y &= -2x + 6 \end{aligned}$$

d. La figura 3 muestra la gráfica de la función y de la recta tangente en el punto $(2,2)$.



Velocidad

Si un objeto se mueve en una línea recta, de tal forma que su posición sobre la recta en cualquier instante esta dado por $s = f(t)$; entonces la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Al hacer un razonamiento similar al que se hizo con la pendiente de la recta tangente se tiene que a medida que Δt se aproxima a cero la velocidad promedio se aproxima a la velocidad instantánea. Entonces la velocidad instantánea en el instante $t = t_0$ está dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

siempre y cuando este límite exista.

Razón de cambio instantánea

En forma mas general, si y es una variable que depende de otra variable x y $y = f(x)$; entonces la razón de cambio promedio de la y con respecto a x está dada por

$$\text{Razon de cambio promedio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Si Δx tiende a cero, la razón de cambio promedio se aproxima a la razón de cambio instantánea. Entonces la razón de cambio instantánea o simplemente razón de cambio está dada por

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definición de derivada como una función

La derivada de una función $y = f(x)$ es una función, representada como $y = f'(x)$ y cuya ley de correspondencia está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siempre que este límite exista.

En casos muy particulares, como por ejemplo, las funciones definidas por varias fórmulas; para establecer si la función es derivable en un número a será necesario calcular la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda en a.

La derivada por la derecha en $x = a$, se define como

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Siempre que este límite exista.

La derivada por la izquierda en $x = a$, se define como

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Siempre que este límite exista.

Finalmente, para terminar el resumen de los contenidos en este tema, se presenta el teorema que establece la relación entre continuidad y la derivada.

TEOREMA:

Si una función es derivable en $x = a$, entonces la función es continua en $x = a$.

Este teorema establece que para que una función sea derivable en un punto, necesariamente tiene que ser continua ahí. Si embargo, el hecho de que sea continua en un punto, no significa que sea derivable.

De este teorema también se puede establecer que para que una función sea derivable en un punto debe cumplir las condiciones siguientes:

1. Debe ser continua en ese punto.
2. No debe tener un pico o punto anguloso en ese punto.
3. No debe tener una tangente vertical en ese punto.

Ejemplo 2: Calculando la derivada de una función

a. Utilizar la definición de derivada para calcular la derivada de la función $f(x) = -\dfrac{2}{3x}$

b. Calcular la derivada de la función cuando $x = -4$

Solución

a. Para calcular la derivada utilizando la definición se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El cálculo de $f(x+h)$ requiere sustituir $x+h$ por x en la función $f(x) = -\dfrac{2}{3x}$, al hacer esto se obtiene $f(x+h) = -\dfrac{2}{3(x+h)}$.

Ahora se sustituyen las expresiones de $f(x+h)$ y $f(x)$ en la definición de derivada y se calcula el límite, el cual es de la forma $\dfrac{0}{0}$ y por lo tanto es necesario efectuar algunas operaciones algebraicas para obtenerlo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[-\dfrac{2}{3(x+h)}\right] - \left[-\dfrac{2}{3x}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{2}{3(x+h)} + \dfrac{2}{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2(x) + 2(x+h)}{3(x)(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2x + 2x + 2h}{3x(x+h)}}{h}
\end{aligned}$$

Usando producto de extremos y medios para terminar de simplificar la expresión y luego calculando el límite

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2h}{3x(x+h)}}{\dfrac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{3xh(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{3x(x+h)} \\
&= \frac{2}{3x(x+0)} = \frac{2}{3x^2}
\end{aligned}$$

Por lo que la derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2}{3x^2}$

b. Para calcular la derivada de la función en $x = -4$ se evalúa $f'(x)$ en -4, obteniendo

$$\begin{aligned}
f'(-4) &= \frac{2}{3(-4)^2} = \frac{2}{3(16)} = \frac{2}{48} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

El resultado anterior se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -\dfrac{2}{3x}$ en $x = -4$ o bien como la razón de cambio instantánea de la función en $x = -4$.

Ejemplo 3: Razón de cambio del ingreso respecto de la cantidad

El señor Arnulfo Vivar tiene un pequeño depósito en la terminal, en donde se dedica a la venta por mayor de platos desechables. La función de ingreso, en quetzales por la venta de su producto es

$$I(x) = 200x - 0.5x^2$$

donde x representa el número de unidades vendidas semanalmente. Cada unidad de platos desechables contiene 200 platos.

a. Calcular el ingreso si se venden 150 unidades del producto a la semana.

b. Calcular la razón de cambio promedio del ingreso cuando las ventas cambian de 150 a 200 unidades.

c. Calcular la razón de cambio promedio cuando las ventas cambian de 150 a 155 unidades.

d. Utilizar la definición de derivada para calcular la razón de cambio instantánea del ingreso con respecto a la cantidad.

e. Calcular la razón de cambio instantánea cuando se venden 150 unidades. ¿Cómo se interpreta este resultado?

f. Calcular la razón de cambio instantánea cuando se venden 250 unidades. ¿Cómo interpreta este resultado?

Solución

Recuerde que el ingreso en una empresa representa la cantidad de dinero que ingresa a la misma por la venta de un producto, por lo tanto, al sustituir un valor de x unidades en la función $I(x)$ se obtiene el ingreso por la venta de x número de unidades.

a. Si se venden 150 unidades, el ingreso se calcula evaluando 150 en la función de ingreso, es decir

$$I(150) = 200(150) - 0.5(150)^2 = 30{,}000 - 11{,}250 = 18{,}750$$

b. La razón de cambio promedio se puede calcular dividiendo el cambio en el ingreso entre el cambio en la cantidad, es decir

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{I(x_2) - I(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En este caso $x_2 = 200$ y $x_1 = 150$, entonces la razón de cambio del ingreso con respecto a la cantidad es

$$\frac{I(200) - I(150)}{200 - 150} = \frac{\left[200(200) - 0.5(200)^2\right] - \left[200(150) - 0.5(150)^2\right]}{50}$$

$$= \frac{20{,}000 - 18{,}750}{50} = 25$$

El resultado nos indica que, al aumentar las ventas de 150 a 200 unidades, los ingresos aumentaron a una razón de cambio promedio de 25 quetzales por unidad.

c. Procediendo como en el inciso anterior, la razón de cambio promedio cuando x cambia de 150 a 155 unidades es

$$\frac{I(155) - I(150)}{155 - 150} = \frac{\left[200(155) - 0.5(155)^2\right] - \left[200(150) - 0.5(150)^2\right]}{5}$$

$$= \frac{18{,}987.5 - 18{,}750}{5} = 47.5$$

Lo que indica que, al aumentar las ventas de 150 a 155 unidades, los ingresos están aumentando a una razón promedio de 47.5 quetzales por unidad.

d. La razón de cambio instantánea se obtiene calculando la derivada del ingreso con respecto a la cantidad x.

$$I'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[200(x+h) - 0.5(x+h)^2\right] - \left[200x - 0.5x^2\right]}{h}$$

Cómo el límite anterior es de la forma $\frac{0}{0}$, se realizan operaciones algebraicas para poder calcularlo

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[200x + 200h - 0.5(x^2 + 2xh + h^2)\right] - \left[200x - 0.5x^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{200x + 200h - 0.5x^2 - xh - 0.5h^2 - 200x + 0.5x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{200h - xh - 0.5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(200 - x - 0.5h)}{h}$$

Cancelando el factor h y evaluando para obtener el límite

$$= \lim_{h\to 0} \left(200 - x - 0.5h^2\right)$$

$$= 200 - x - 0.5(0)^2$$

$$= 200 - x$$

De donde la razón de cambio instantánea es $I'(x) = 200 - x$

e. Cuando se venden 150 unidades, la razón de cambio instantánea es

$$I'(150) = 200 - 150 = 50$$

El resultado anterior significa que cuando se venden 150 unidades los ingresos están aumentando a una razón de cambio instantánea de 50 quetzales por unidad.

f. Cuando se venden 250 unidades, la razón de cambio instantánea es

$$I'(150) = 200 - 250 = -50$$

Lo que significa que al vender la unidad 250 los ingresos disminuyendo aproximadamente en Q50 por cada unidad.

Sugerencias para el estudiante

Dada una función $y = f(x)$, para calcular la pendiente o razón de cambio promedio entre dos valores x_1 y x_2, utilice la expresión

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si $h = x_2 - x_1$, la razón de cambio promedio también se puede calcular usando la expresión

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Para calcular la derivada de una función $y = f(x)$ utilizando la definición, se debe calcular el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de la curva $(a, f(a))$, calcule la pendiente de la recta tangente en ese punto utilizando la definición de derivada.

$$m = f'(a)$$

Luego utilice la forma punto pendiente para la ecuación de una recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La pendiente de la recta normal a una curva se calcula utilizando el concepto de rectas perpendiculares, es decir que

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$