

PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^3+8}}$$

Solución

Expresando la raíz como exponente fraccionario

$$f(x) = \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{1/2}$$

Utilizando la regla de la cadena para calcular la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{-1/2} D_x \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right) \end{aligned}$$

La derivada que queda por calcular es la derivada de un cociente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(x^3+8)D_x(4-x^2) - (4-x^2)D_x(x^3+8)}{(x^3+8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(x^3+8)(-2x) - (4-x^2)(3x^2)}{(x^3+8)^2} \end{aligned}$$

Finalmente solo hace falta un poco de algebra para simplificar la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{-1/2} \cdot \frac{-2x^4 - 16x - 12x^2 + 3x^4}{(x^3+8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4-x^2}{x^3+8}\right)^{-1/2} \cdot \frac{x^4 - 12x^2 - 16x}{(x^3+8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3+8}{4-x^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{x^4 - 12x^2 - 16x}{(x^3+8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^3+8)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} \cdot \frac{x(x^3 - 12x - 16)}{(x^3+8)^2} \\ &= \frac{x(x^3 - 12x - 16)}{2(4-x^2)^{1/2}(x^3+8)^{3/2}} \end{aligned}$$
