

PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x \text{ csc } 5x)$$

Solución

En este problema tenemos el límite de un producto. Al evaluar el límite de cada factor se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x) = \text{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{csc } 5x) = \text{csc}(0) \quad \text{no está definida}$$

El segundo límite es un límite infinito, el producto de los dos límites tiene la forma

$$0 \cdot \infty$$

Que es otra forma indeterminada y el límite debe ser calculado efectuando algunas y sustituciones trigonométricas y operaciones algebraicas. El límite puede expresarse como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x \text{ csc } 5x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x) \frac{1}{\text{sen } 5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x} \end{aligned}$$

El límite obtenido tiene forma indeterminada $0/0$ y se puede calcular multiplicando el numerador por $\frac{3x}{3x}$ y el denominador por $\frac{5x}{5x}$ y luego simplificando

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x \text{ csc } 5x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x \cdot \frac{3x}{3x}}{\text{sen } 5x \cdot \frac{5x}{5x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\text{sen } 5x}{5x} \cdot 5x} \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{3x}}{\frac{\text{sen } 5x}{5x}} \end{aligned}$$

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador no sea igual a 0, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } 3x \text{ csc } 5x) = \frac{3}{5} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x}}$$

Siendo formal se debiera hacer una sustitución para calcular los límites del numerador y del denominador, como se hizo en el ejemplo 1, pero es claro que ambos límites tienden a 1 y para ahorrar un poco de tiempo y espacio omitimos la sustitución

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \csc 5x) &= \frac{3(1)}{5(1)} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$
