PROBLEMA RESUELTO 2

Dada la función

$$f(x) = \sqrt{5-4x}$$

a. Utilice la definición de derivada para encontrar la derivada de la función.

b. Obtenga la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

c. Dibuje la gráfica de la función y la recta tangente.

Solución

a. Para calcular la derivada utilizando la definición se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El cálculo de $f(x+h)$ requiere sustituir $x+h$ por x en la función $f(x) = \sqrt{5-4x}$, al hacer esto se obtiene $f(x+h) = \sqrt{5-4(x+h)}$.

Ahora se sustituyen las expresiones de $f(x+h)$ y $f(x)$ en la definición de derivada y se calcula el límite, el cual es de la forma $\frac{0}{0}$ y por lo tanto es necesario efectuar algunas operaciones algebraicas para obtenerlo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4(x+h)} - \sqrt{5-4x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4x-4h} - \sqrt{5-4x}}{h} \end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del numerador y desarrollando el producto resultante se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5-4x-4h} - \sqrt{5-4x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}}{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5-4x-4h}\right)^2 - \left(\sqrt{5-4x}\right)^2}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(5-4x-4h) - (5-4x)}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h\left(\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4}{\sqrt{5-4x-4h} + \sqrt{5-4x}} \end{aligned}$$

El límite anterior ya no tiene forma indeterminada y se puede calcular por evaluación, para obtener la derivada buscada

$$f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{5-4x-4(0)} + \sqrt{5-4x}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{5-4x} + \sqrt{5-4x}}$$
$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$$

b. Para obtener la ecuación de la recta tangente se necesita un punto en la curva y la pendiente. La coordenada y de punto la obtenemos al evaluar en la función $x = -1$

$f(-1) = \sqrt{5-4(-1)} = \sqrt{9} = 3$, por lo que el punto de tangencia es $(-1,3)$

La pendiente de la recta tangente se obtiene evaluando la derivada en $x = -1$

$$f'(-1) = \frac{-2}{\sqrt{5-4(-1)}} = \frac{-2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$$

Utilizando la fórmula punto pendiente para la ecuación de la recta se tiene

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x+1)$$
$$3y - 9 = -2x - 2$$
$$2x + 3y - 7 = 0$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función en color azul, la recta tangente en color rojo.