1.6 Continuidad

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es el de continuidad en un punto. De manera informal se puede decir que una función es continua en $x = c$, si su gráfica no tiene agujeros o saltos al pasar por c.

Si bien el análisis de la continuidad en un punto es muy teórico, el concepto de continuidad es simple. Es preciso que el estudiante distinga cuando una función es continua en un punto y cuando no lo es ya que muchas de las definiciones y teoremas del cálculo son aplicables sólo a funciones continuas.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de ésta sección el estudiante estará en capacidad de

- Determinar si una función es continua en un punto usando la definición de continuidad.
- Usar la gráfica de una función para determinar si es continua en un punto.
- Determinar si una función es continua en un intervalo.

Continuidad en un punto

Una función f es continua en $x = c$ si satisface las condiciones siguientes

1. $f(c)$ está definida.

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

La figura 1 muestra la gráfica de una función que es continua en todos los puntos de su dominio

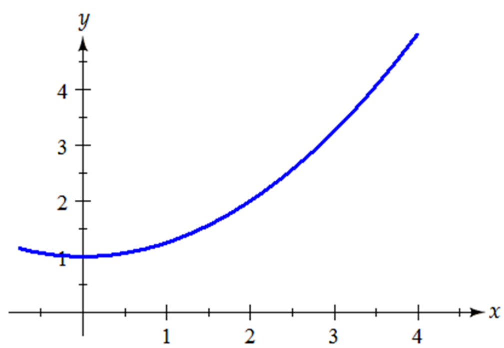

Figura 1

Cuando una función no satisface alguna de las 3 condiciones de la definición de continuidad se dice que es discontinua en ese punto.

En la figura 2 se muestra la gráfica de una función discontinua en $x = 2$ ya que no satisface la primera condición de la definición

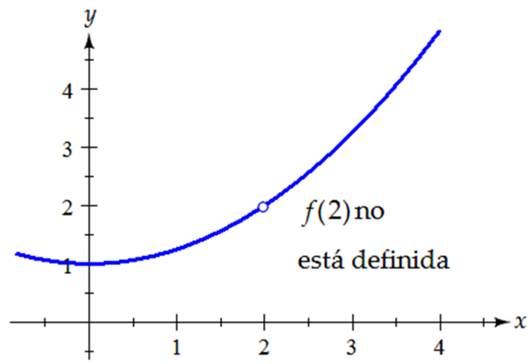

Figura 2

En la figura 3 se muestra la gráfica de una función que no es continua en $x = 2$ pues no satisface la segunda, condición de la definición

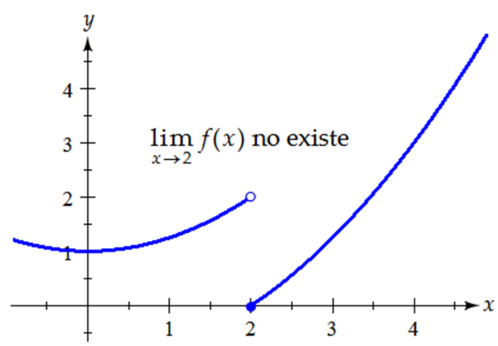

Figura 3

En la figura 4 se muestra la gráfica de una función que satisface las primeras dos condiciones de la definición en $x = 2$ pero que es discontinua pues no satisface la tercera condición.

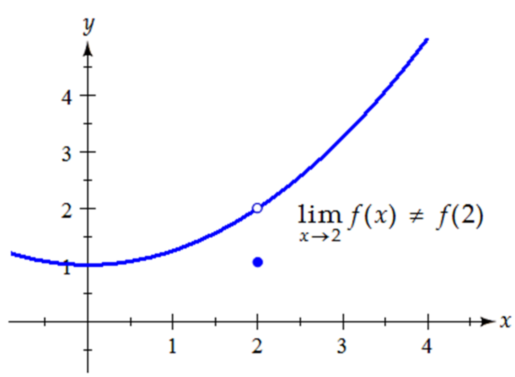

Figura 4

Cuando una función es discontinua en $x = c$, pero el límite $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, se dice que la función tiene una discontinuidad removible en c ya que es posible redefinir la función de tal manera que sea continua en todo su dominio.

Cuando una función es discontinua en $x = c$, pero el límite $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe, se dice que la función tiene una discontinuidad no removible en c ya que no es posible redefinir la función de tal manera que sea continua en todo su dominio.

Continuidad en un intervalo abierto

Una función es continua en un intervalo abierto (a, b), si es continua en todos los números del intervalo.

Es claro que no se puede hacer un análisis de continuidad en cada punto de un intervalo abierto. La continuidad en un intervalo abierto se analiza utilizando el conocimiento que ya se tiene de la continuidad de ciertas funciones; por ejemplo, las funciones polinomiales son continuas en todos los reales, por lo tanto son continuas en cualquier intervalo abierto. Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.

Continuidad en un intervalo cerrado

Una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si satisface las condiciones siguientes:

1. Es continua en el intervalo abierto (a, b)

2. Es continua por el lado derecho de a, es decir que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3. Es continua por el lado izquierdo de b, es decir que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

La definición de continuidad en un intervalo cerrado puede aplicarse a intervalos cerrados unicamente por la derecha $(a, b]$ o a intervalos cerrados por la izquierda $[a, b)$. En cualquiera de los dos casos solo se utiliza el inciso 2 o el inciso 3, según corresponda.

Sugerencias para el estudiante

Para analizar la continuidad de una función $x = c$ siga el procedimiento siguiente

1. Calcule $f(c)$. Si $f(c)$ no está definida la función es discontinua en c. Si desea establecer si la discontinuidad es removible o no removible continúe con el paso 2.

2. Calcule $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Si el límite no existe, es decir que no es un número real. La función es discontinua no removible. Si el límite existe, hay que continuar con el paso 3.

3. Verifique que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Esto significa que el límite y la imagen deben tener el mismo valor en $x = c$ y éste valor debe ser un número real. Si ésta última condición se cumple entonces la función es continua en c. Si Esta última condición no se cumple pero el límite existe, la función es discontinua removible en c.

Para analizar la continuidad en un intervalo, primero se debe establecer si la función es continua en el intervalo abierto correspondiente haciendo uso del de la continuidad de las diferentes funciones ya conocidas. Luego se debe analizar la continuidad de la función en el extremo del intervalo utilizando la definición de continuidad en un intervalo cerrado.