1.5 Límites al infinito

INTRODUCCIÓN

Los límites al infinito se utilizan para estudiar el comportamiento de las funciones cuando los valores de x crecen sin límite o cuando decrecen si límite

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de este tema el estudiante estará en capacidad de

- Calcular límites de funciones cuando *x* tiende al infinito positivo.
- Calcular límites de funciones cuando *x* tiende al infinito negativo.
- Encontrar las asíntotas horizontales de una función.

Límites al infinito

La expresión

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Se lee "**El límite cuando x tiende al infinito de la función $f(x)$ es L**", y significa que los valores de $f(x)$ se aproximan al número L cuando los valores de x crecen sin límite. La figura 8 muestra geométricamente el concepto de límite al infinito

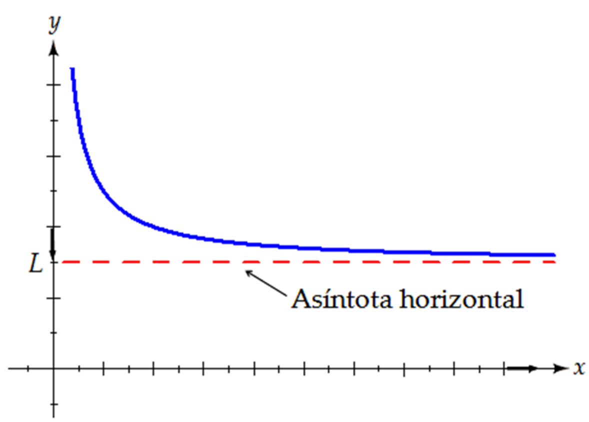

Figura 1

En forma equivalente la expresión

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ están muy cerca del número L cuando x toma valores negativos muy grandes. La figura 2 ilustra este límite

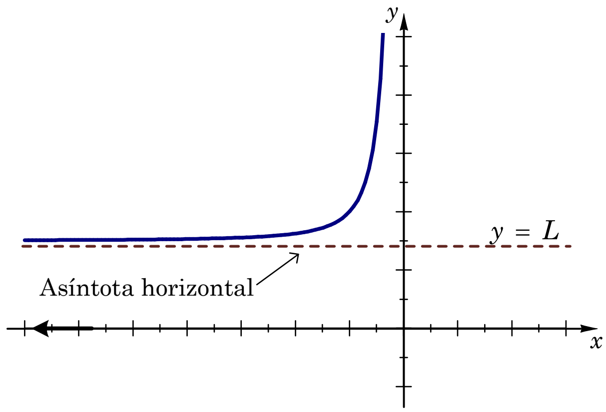

Figura 2

Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de la función $f(x)$, si alguno de los siguientes límites es verdadero

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

La propiedad anterior sugiere que para obtener las asíntotas horizontales de una función, hay que calcular los límites cuando x tiende al infinito positivo y cuando x tiende al infinito negativo.

Propiedades de los límites al infinito

Hay varias propiedades para el cálculo de límites al infinito, sin embargo, las dos que se presentan aquí son suficientes para calcular la mayor parte de los límites al infinito

Propiedad 1

Si $r > 0$ entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Si $r > 0$ y si x^r está definida para valores negativos de x entonces $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Propiedad 2

Si $\lim_{x \to \infty} g(x) = L$ y la función f es continua en L entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to \infty} g(x)\right) = f(L)$$

La propiedad anterior es de mucha utilidad cuando se quiere calcular límites al infinito de funciones compuestas.

Propiedades del infinito

Cuando se calculan límites que involucran el infinito, es frecuente tener que realizar algunos cálculos que lo involucran. Estos cálculos se pueden realizar utilizando las propiedades de los límites. En forma simple se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &\to \infty \\
\infty \cdot \infty &\to -\infty \\
\infty \cdot (-\infty) &\to -\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &\to -\infty \\
c(+\infty) &\to +\infty \qquad \text{si} \quad c > 0 \\
c(+\infty) &\to -\infty \qquad \text{si} \quad c < 0 \\
(+\infty)^n &\to +\infty \qquad \text{si} \quad n > 0
\end{aligned}$$

Formas indeterminadas

Cuando se calculan límites, se pueden presentar alguna de las formas indeterminadas siguientes

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^0$$

Cuando esto sucede, es necesario manipular algebraicamente la expresión para poder calcular el límite.