PROBLEMA RESUELTO 1

Si la función f está definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a. Analice si la función es continua en $x = -1$.

b. Analice si la función es continua en $x = 1$.

c. Dibuje la representación gráfica de la función para confirmar sus resultados analíticos.

Solución

a. La función es continua en $x = -1$ si satisface las 3 condiciones de la definición de continuidad en ese punto.

i. La primera condición establece que $f(-1)$ esté definida

$f(-1) = (-1)^2 = 1$, por lo que si está definida.

ii. La segunda condición es que el límite exista. Para calcular el límite en una función de varias fórmulas se usan límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2) = (-1)^2 = 1$$

Como el límite $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ se tiene que el límite si existe.

iii. Finalmente la tercera condición establece que el límite debe ser igual a la imagen. En este caso se tiene

$\lim_{x\to -1} f(x) = 1$ y $f(-1) = 1$. Por lo tanto se cumple la tercera condición y se concluye que la función es continua en $x = -1$

b. La continuidad en $x = 1$ se analiza de la misma forma que en el inciso anterior

$f(1) = (1)^2 = 1$, si está definida.

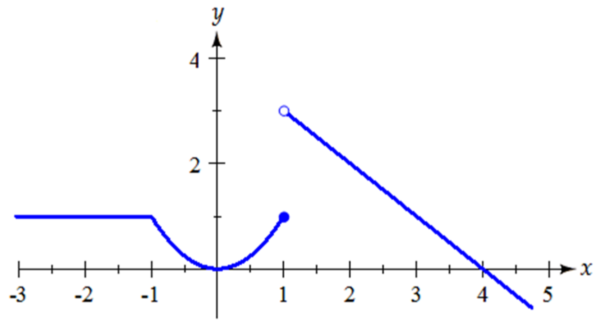
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2) = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4 - x) = (4 - 1) = 3$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$, se concluye que el límite no existe.

Por lo tanto la función no es continua en $x = 1$.

La figura 5 muestra la gráfica de la función, en donde se pueden verificar los resultados obtenidos analíticamente.


y
4
2
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x