PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la derivada de la función

$$h(t) = (t^4 - t)^{-3}(5 - t^2)^{-1}$$

Solución

Aplicando la fórmula para la derivada de un producto se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= D_t\left[(t^4 - t)^{-3}(5 - t^2)^{-1}\right] = \\ &= (t^4 - t)^{-3} D_t\left[(5 - t^2)^{-1}\right] + (5 - t^2)^{-1} D_t\left[(t^4 - t)^{-3}\right] \end{aligned}$$

Ahora se puede utilizar la regla de la cadena para derivar las expresiones que se encuentran entre corchetes

$$\begin{aligned} h'(t) &= (t^4 - t)^{-3}(-1)(5 - t^2)^{-2} D_t(5 - t^2) + (5 - t^2)^{-1}(-3)(t^4 - t)^{-4} D_t(t^4 - t) \\ &= (t^4 - t)^{-3}(-1)(5 - t^2)^{-2}(-2t) + (5 - t^2)^{-1}(-3)(t^4 - t)^{-4}(4t^3 - 1) \end{aligned}$$

Aquí el proceso de derivación ya ha finalizado y lo que sigue es la simplificación algebraica de la derivada. La simplificación se puede realizar de varias formas y en este caso primero se ordenarán los términos y luego se sacará factor común

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2t(t^4 - t)^{-3}(5 - t^2)^{-2} - 3(4t^3 - 1)(t^4 - t)^{-4}(5 - t^2)^{-1} \\ &= (t^4 - t)^{-4}(5 - t^2)^{-2}\left[2t(t^4 - t) - 3(4t^3 - 1)(5 - t^2)\right] \\ &= (t^4 - t)^{-4}(5 - t^2)^{-2}\left[2t^5 - 2t^2 - 60t^3 + 12t^5 + 15 - 3t^2\right] \\ &= (t^4 - t)^{-4}(5 - t^2)^{-2}(14t^5 - 60t^3 - 5t^2 + 15) \end{aligned}$$

Finalmente trasladando los factores con exponente negativo al denominador se obtendrá la respuesta más sencilla posible

$$h'(t) = \frac{14t^5 - 60t^3 - 5t^2 + 15}{(t^4 - t)^4(5 - t^2)^2}$$