

PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x}$$

Solución

Como la función es una expresión racional, debemos calcular el límite del numerador y del denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan 3x) = \tan(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x) = 0$$

Como el límite del numerador y el denominador tienden a 0, el límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas y utilizar algunas identidades trigonométricas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x \cos 3x}$$

Como el ángulo de la función trigonométrica es múltiple, es recomendable hacer un cambio de variable en el límite. Haciendo

$$u = 3x$$

Se tiene que $x = \frac{u}{3}$, además cuando x tiende a 0 u también tiende a 0

Entonces el límite puede expresarse en términos de la variable u de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x \cos 3x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{5\left(\frac{u}{3}\right) \cos u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3 \text{sen } u}{5u \cos u} \end{aligned}$$

Finalmente se puede expresar el límite como el producto de dos límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\cos u}$$

Ahora se puede utilizar el teorema $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ y calcular el segundo límite por evaluación, obteniéndose que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{3}{5} (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{3}{5}$$
