PROBLEMA RESUELTO 1

Dada la función

$$f(x) = -\frac{2}{3x}$$

a. Utilice la definición de derivada para encontrar la derivada de la función.

b. Obtenga la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

c. Obtenga la ecuación de la recta normal a la curva en $x = 2$.

Solución

a. Para calcular la derivada utilizando la definición se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El cálculo de $f(x+h)$ requiere sustituir $x+h$ por x en la función $f(x) = -\frac{2}{3x}$, al hacer esto se obtiene $f(x+h) = -\frac{2}{3(x+h)}$.

Ahora se sustituyen las expresiones de $f(x+h)$ y $f(x)$ en la definición de derivada y se calcula el límite, el cual es de la forma $\frac{0}{0}$ y por lo tanto es necesario efectuar algunas operaciones algebraicas para obtenerlo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[-\frac{2}{3(x+h)}\right] - \left[-\frac{2}{3x}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2}{3(x+h)} + \frac{2}{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2(x) + 2(x+h)}{3(x)(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2x + 2x + 2h}{3x(x+h)}}{h}$$

Usando producto de extremos y medios para terminar de simplificar la expresión y luego calculando el límite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{3x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{3xh(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{3x(x+h)}$$

$$= \frac{2}{3x(x+0)} = \frac{2}{3x^2}$$

Por lo que la derivada de la función es $f'(x) = \frac{2}{3x^2}$

b. Para obtener la ecuación de la recta tangente se necesita un punto y la pendiente. La coordenada y de punto la obtenemos al evaluar en la función $x = 2$

$$f(2) = -\frac{2}{3(2)} = -\frac{1}{3}\text{, por lo que el punto de tangencia es } \left(2, -\frac{1}{3}\right)$$

La pendiente de la recta tangente se obtiene evaluando la derivada en $x = 2$

$$f'(2) = \frac{2}{3(2)^2} = \frac{2}{3(4)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Utilizando la fórmula punto pendiente para la ecuación de la recta se tiene

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(x - 2)$$
$$6y + 2 = x - 2$$
$$x - 6y - 4 = 0$$

c. La pendiente de la recta perpendicular o normal se puede obtener a partir de la pendiente de la tangente, recordando que dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares sí $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Así que la pendiente de la recta perpendicular es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} - \frac{1}{\frac{1}{6}} = -6$$

La ecuación de la recta normal se obtiene de la misma forma que la ecuación de la recta tangente, es decir

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y + \frac{1}{3} = -6(x - 2)$$
$$3y + 1 = -18x + 36$$
$$18x + 3y - 35 = 0$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función en color azul, la recta tangente en color rojo y la recta normal en color verde.