UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-3-V-1-00-2015

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Octubre de 2015**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Luis Maldonado**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Lic. Gustavo Santos**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Tercer examen parcial

Tema 1 (20 puntos)

Dada la siguiente función racional $f(X) = \frac{x+1}{x-1}$, determine:

a) La asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$
b) La función inversa de $f(x)$
c) Utilizando el criterio adecuado, verifique el resultado del inciso anterior
d) La grafica de $f(x)$ y su inversa en el mismo sistema coordenado.

Tema 2 (20 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones

$a)\quad 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{3+\frac{x}{2}}$ $\qquad b)\ (\log_3(x+1))^{1/2} - 3\log_{27}(x+1) = 0$

Demuestre la siguiente identidad y resuelva la ecuación trigonométrica

$c)\ sin^2\alpha(csc^2\alpha - 1) = cos^2\alpha$ $\qquad d)\ 2sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

Tema 3 (20 puntos)

Una sustancia radioactiva **X** es transportada a un laboratorio para su investigación. Al llegar a su destino hay 10 mg de la cantidad inicial de esta, y se estima que el tiempo transcurrido es aproximadamente dos vidas medias de la sustancia, determine: a) Cual era la cantidad inicial de la sustancia? b) Si pasados 5 horas hay 5 mg, cual es la vida media de la sustancia? c) Construya un modelo matemático para modelar el fenómeno. d) Esboce la grafica de la función.

Tema 4 (20 puntos)

Para la siguiente función trigonométrica $f(x) = 2 - 3\cos(\pi x + 2)$, determine:

a) La amplitud $\boldsymbol{A}$
b) El periodo $\boldsymbol{T}$
c) El desplazamiento de fase
d) El corrimiento vertical

Tema 5 (20 puntos)

Desde la azotea de un edificio de 40 metros de altura, una persona observa la base de otro edificio más pequeño con un ángulo de depresión de 60^0, si la altura del segundo edificio es igual a la distancia de separación de las bases de los dos edificios, determine el ángulo de elevación con el cual una persona en la azotea del segundo edifico ve la azotea del primero.

Solución de examen

0.1. Tema 1(20 puntos)

Dada la siguiente función racional $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ determine:

a) Las asíntotas verticales y horizontales de f(x).

No.	Explicación	Operatoria
1	Las asíntotas verticales están dadas por los ceros del denominador,es decir donde la *función* no esta definida. Si se evalúa la función para valores cercanos de $x = 1$ por la derecha $f(x) \to \infty$, entonces $x = 1$ es una asíntota vertical de $f(x)$	$x - 1 = 0$ $x = 1$
2	Para determinar las asíntotas horizontales, primero se debe reescribir $f(x)$ como una función racional propia.	$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$
3	De esta forma se puede ver claramente que cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ el segundo término de la expresión anterior se vuelve 0 y $f(x) \to 1$. Entonces, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f(x)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 + \cancelto{0}{\frac{2}{x-1}}$

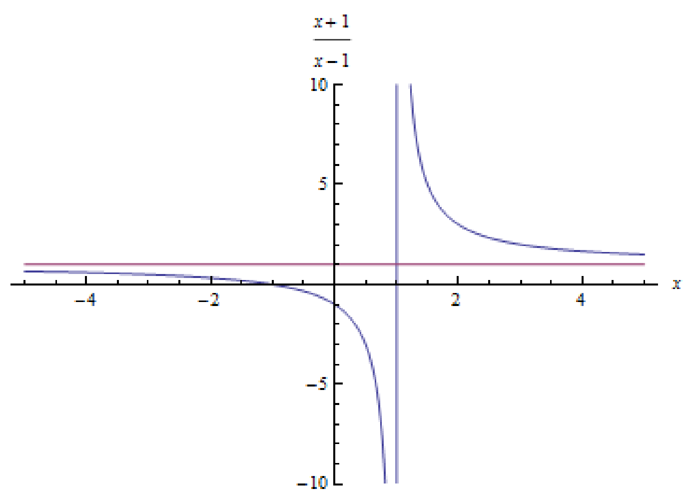
b) La *función* inversa de $f(x)$.

No.	Explicación	Operatoria
1	Para encontrar la *función* inversa de $f(x)$ denotada por $f^{-1}(x)$ primero se resuelve la *ecuación* para x en *términos* de y.	$y = \frac{x+1}{x-1}$ $y(x-1) = x + 1$ $yx - x = y + 1$ $x(y-1) = y + 1$ $x = \frac{y+1}{y-1}$
2	Luego, se intercambian las variables x e y, la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.	$y = \frac{x+1}{x-1}$

c) Utilizando el criterio adecuado, verifique el resultado anterior.

No.	Explicación	Operatoria
1	Para verificar que en el paso anterior se determinó la inversa de f(x) correctamete, ésta debe cumplir con la propiedad de la función inversa: $f(f^{-1}(x)) = x$.Esto significa que al sustituir $f^{-1}(x)$en el argumento de $f(x)$ el resultado debe ser igual a x	$f(f^{-1}(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$
2	Desarrollando y simplificando la expresión anterior se obtiene se comprueba que la funcion inversa es correcta.	$f(f^{-1}(x)) = \frac{\frac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+1-x+1}{\cancel{x-1}}}$ $f(f^{-1}(x)) = \frac{2x}{2} = x$

d) La $gráfica$ de $f(x)$ y su inversa en el mismo sistema coordenado.



0.2. Tema 2(20 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{3+\frac{x}{2}}$

No.	Explicación	Operatoria
1	Primero se ordena el lado izquierdo de la ecuación observando que $\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1}$ es igual a $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$,y luego se suman los terminos semejantes.	$2\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$ $= \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}\left(\frac{5}{2}\right)$
2	El lado derecho de la ecuación también puede reescribirse de la siguiente manera.	$\left(\frac{25}{4}\right)^{3+\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2\frac{6+x}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6-x}$
3	Ahora la ecuación puede expresarse de la siguiente forma.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{6+x}$
4	Multiplicando por $\left(\frac{2}{5}\right)$ ambos lados de la ecuación.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{-6-x}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-5-x}$
5	Con la expresión simplificada ahora es posible observar que se puede aplica el logaritmo en ambos lados y despejar para la variable x	$\log\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \log\left(\frac{2}{5}\right)^{-5-x}$
6	El logaritmo de una potencia de un numero es el exponente multiplicado por logaritmo del numero.	$(x+1)log\left(\frac{2}{5}\right) = (-5-x)log\left(\frac{2}{5}\right)$
7	Simplificando y resolviendo la ecuación de primer grado se obtiene el resultado.	$x+1 = -5-x$ $2x = -6$ $x = -3$

b) $(log_3(x+1))^{1/2} - 3log_{27}(x+1) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1	Primero se realiza un cambio de base del segundo término de la ecuación a una base común, en este caso de base 3. Recuerde que $log_a X = \frac{\log_b X}{log_b a}$.	$log_{27}(x+1) = \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 27}$ $= \frac{1}{3}\log_3(x+1)$
2	Se hace la sustitución $u = \log_3(x+1)$ y se resuelve la ecuación para determinar los valores u.	$(log_3(x+1))^{1/2} - \log_3(x+1) = 0$ $u^{1/2} - u = 0$ $u = 0,\ u = 1$
3	Para regresar a la variable x se sustituye $u = \log_3(x+1)$ por cada solución encontrada en el paso 2. Recuerde que según las propiedades de los logaritmos el número $\log_a M$ es el exponente al cual debe elevarse a para obtener M.	$3^{log_3(x+1)} = 3^0$ $x+1 = 3^0$ **x=0** $3^{log_3(x+1)} = 3^1$ $x+1 = 3^1$ **x=2**

Demuestre la siguiente identidad y resuelva la ecuación trigonometrica.

c) $\sin^2\alpha(\csc^2\alpha - 1) = \cos^2\alpha$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para demostrar la identidad solo es necesario trabajar con un lado de la identidad. Por conveniencia, se selecciona el lado izquierdo y se sustituye $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ en la expresión.	$\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}^2 - 1\right)$ $\cancel{\sin^2\alpha}\left(\frac{1-\sin^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}}\right)$
2	Utilizando la identidad trigonometrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ se demuestra la identidad.	$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

d) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para resolver esta ecucación observe que debe expresarla en terminos solo de $\sin\theta$ o $\cos\theta$ utilizando la identidad $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. POr facilidad se sustituyendo $\sin^2\theta$.	$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0$ $-2\cos^2\theta - \cos\theta + 1 = 0$
2	Realizando la sustitución $z = \cos\theta$ y aplicando la fórmula cuadrática.	$2z^2 + z - 1 = 0$ $z = \frac{-1\pm\sqrt{1-(4)(2)(-1)}}{2(2)}$ $z = -1 \ z = \frac{1}{2}$
3	Regresando a la variable de interés y despejando, se obtiene la solución de la ecuación. Recuerde que en la ecuación no se restringe los valores de θ y que la función $\cos\theta$ es periodica.	$\cos\theta = -1$ $\theta = \arccos(-1) = \pi \pm 2n\pi$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} \pm 2n\pi$ $n = 0, 1, 2, ..$

0.3. Tema 3 (20 puntos)

Una sustancia radioactiva X es transportada a un laboratorio para su investigación. Al llegar a su destino hay 10 mg de la cantidad inicial de esta, y se estima que el tiempo transcurrido es aproximadamente dos vidas medias de la sustancia, determine:

a) ¿Cual era la cantidad inicial de la sustancia?

El modelo para este problema de decaimiento exponencial es el siguiente:

$$x(t) = Ae^{-kt} \tag{1}$$

Donde:
k es la constante de decaimiento exponencial y,
t es el tiempo medido en horas.

Esta función puede expresarse de otra manera utilizando el hecho de que la vida media es el tiempo requerido para una sustancia se reduzca a la mitad. En otras palabras, si se denota la vida media como τ y X_0 es la cantidad de sustancia inicial, entonces:

$$\frac{X_0}{2} = X_0 e^{k\tau}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k\tau$$
$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau}$$
$$x(t) = X_0 e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)/t} = X_0 (e^{ln\left(\frac{1}{2}\right)})^{t/\tau}$$

$$x(t) = X_0(\frac{1}{2})^{t/\tau} \tag{2}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Utilizando la ecuación No. 2 se puede determinar la cantidad inicial de la sustancia. Sabiendo que $x(2\tau) = 10mg$ y sustituyendo en el modelo anterior.	$x(2\tau) = 10mg$ $10 = X_0(\frac{1}{2})^{2\tau/\tau}$
2	Simplificando y despejando para X_0 se encuentra la cantidad inicial de sustancia radioactiva.	$10 = X_0(\frac{1}{4})$ $X_0 = 40mg$

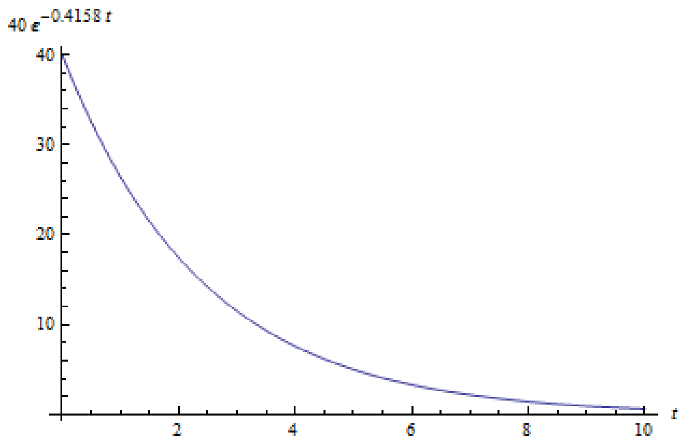
b) Si pasados 5 horas hay 5 mg, ¿cuál es la vida media de la sustancia?

No.	Explicación	Operatoria
1	Se desea encontrar el valor de τ. Por lo tanto utilizando la ecuación No. 2 y dado que $x(5) = 5mg$.Primero se sustituye estas condiciones en el modelo.	$5 = 40(\frac{1}{2})^{5/\tau}$
2	Aplicando log en ambos lados de la ecuacion.	$log(\frac{1}{8}) = \frac{5}{\tau} log(\frac{1}{2})$
3	Dividiendo entre $5log(\frac{1}{2})$ y despejando para τ se obtiene la vida media de la sustancia.	$\tau = \frac{5log(\frac{1}{2})}{log(\frac{1}{8})} = 1{,}667$

c) Construya un modelo matemático para modelar el fenómeno.

No.	Explicación	Operatoria
1	El modelo matematico se obtiene al sutituir los valores de k y X_0 en la ecuación No. 1	$k = \frac{ln(\frac{1}{2})}{1{,}667} = -0{,}4158$ $x(t) = 40e^{-0{,}4158t}$

d) Esboce la grafica de la función.



0.4. Tema 4 (20 puntos)

Para la siguiente función trigonométrica $f(x) = 2 - 3\cos(\pi x + 2)$, determine:

a) La amplitud A

b) El periodo T

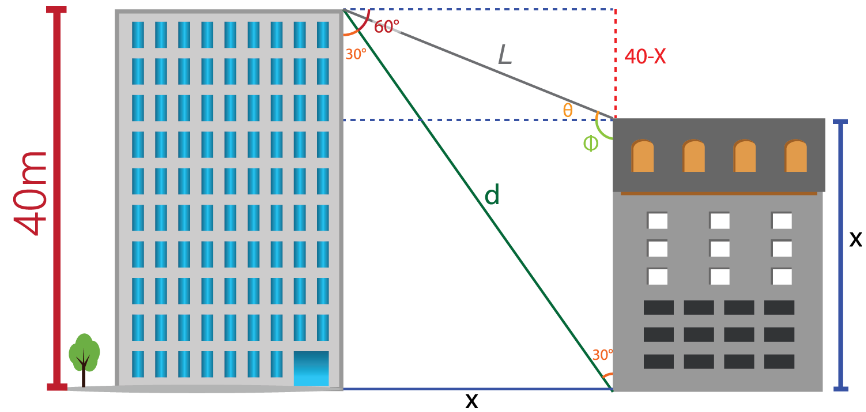
c) EL desplazamiento de fase

d) El corrimiento vertical

No.	Explicación	Operatoria
1	La forma general de una función trigonométrica es $f(x) = A\cos(\omega(x + \frac{d}{\omega})) + b$. Por lo tanto la amplitud de la función es $Amplitud = \|A\|$	A = 3
2	El periodo de la función esta relacionado con la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T}$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
3	El desplazamiento de fase es igual a $\phi = \frac{d}{\omega}$.Escribiendo la función de un esta forma.	$f(x) = 2 - 3\cos(\pi(x + 2/\pi))$ $\phi = \frac{2}{\pi}$
4	El corrimiento vertical hace que la grafica se traslade en el eje y. En este caso esta dado por el valor de b.	$b = 2$

0.5. Tema 5 (20 puntos)

Desde la azotea de un edificio de 40 metros de altura, una persona observa la base de otro edificio más pequeño con un ángulo de depresión de 60°, si la altura del segundo edificio es igual a la distancia de separación de las bases de los dos edificios, determine el ángulo de elevación con el cual una persona en la azotea del segundo edifico ve la azotea del primero.



No.	Explicación	Operatoria
1	Como se observa en la figura, el ángulo de elevación θ es el que se desea encontrar. Si se logra determinar el valor de x, entonces se puede utilizar la relación trigonométrica $\tan\theta = \frac{40-x}{x}$ para determinar el valor de este ángulo.	$\theta = \arctan(\frac{40-x}{x})$
2	El valor de x se determina directamente de la relación trigonométrica.	$\tan 30° = \frac{x}{40}$ $x = 40\tan 30° = \frac{40\sqrt{3}}{3}$
3	Finalmente, se sustituye x en la ecuación del paso 1 para determinar el ángulo de elevación.	$\theta = \arctan(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}})$ $\theta = \arctan(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$ $\theta = 36°$