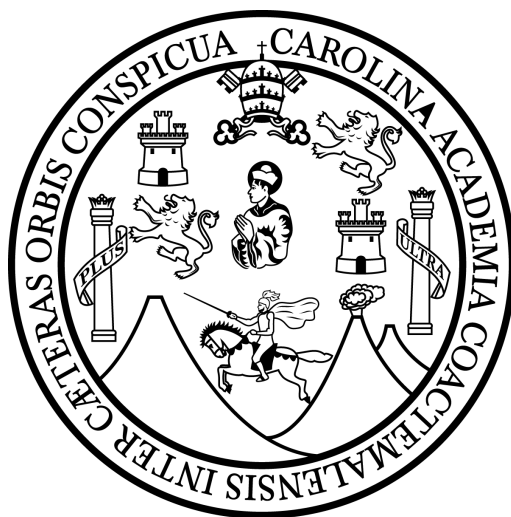


CLAVE-101-2-M-1-00-2018\_sK

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

---



---

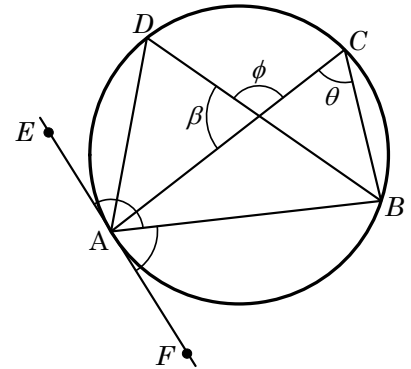
|                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| <b>CURSO:</b>              | <b>Matemática Básica 1</b>    |
| <b>SEMESTRE:</b>           | <b>Primero</b>                |
| <b>CÓDIGO DEL CURSO:</b>   | <b>101</b>                    |
| <b>TIPO DE EXAMEN:</b>     | <b>Segundo Examen Parcial</b> |
| <b>FECHA DE EXAMEN:</b>    | <b>15 de marzo de 2018</b>    |
| <b>HORA DE EXAMEN:</b>     | <b>7:00 a.m.</b>              |
| <b>RESOLVIÓ EL EXAMEN:</b> | <b>Eddy Brandon de León</b>   |
| <b>REVISÓ EL EXAMEN:</b>   | <b>Ing. Mario Rivera</b>      |
| <b>COORDINADOR:</b>        | <b>Ing. Arturo Samayoa</b>    |

## Segundo examen parcial

Temario A

### Tema 1: (20 puntos)

En la figura dada se tienen los siguientes datos  
 $\angle BAF = 75^\circ$ ,  $\angle CD = 70^\circ$ . Calcule la medida de los  
ángulos:  $\angle BAE$ ,  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\phi$



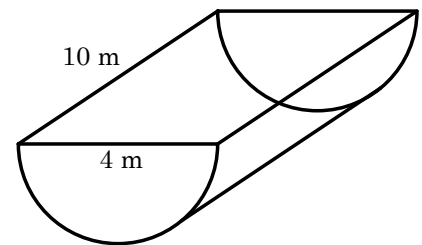
### Tema 2: (20 puntos)

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto  $(0, 3)$  y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas  $-x + y = 3$  y  $-x - y = 1$ .

### Tema 3: (20 puntos)

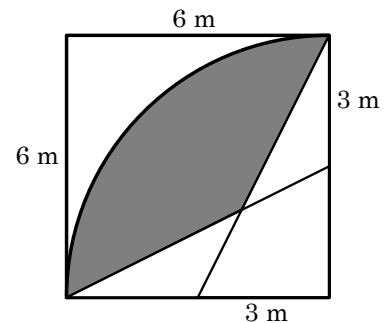
Un tanque tiene 10 metros de largo y su sección transversal es un semicírculo de 4 metros de diámetro, como se muestra en la figura. Calcule:

- El volumen total del tanque.
- Encuentre el volumen de agua cuando la altura de la superficie del agua es  $h = 1$ .
- El área del espejo de agua cuando  $h = 1$ .



### Tema 4: (20 puntos)

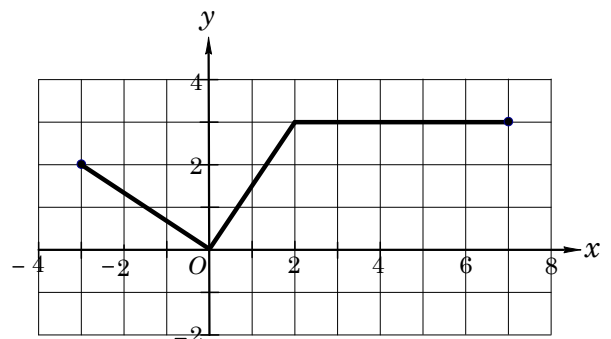
Calcule el área sombreada de la figura que se muestra a la derecha si los lados del cuadrado miden 6 metros de longitud,



### Tema 5: (20 puntos)

Dada la gráfica de la función  $f(x)$  que se muestra.

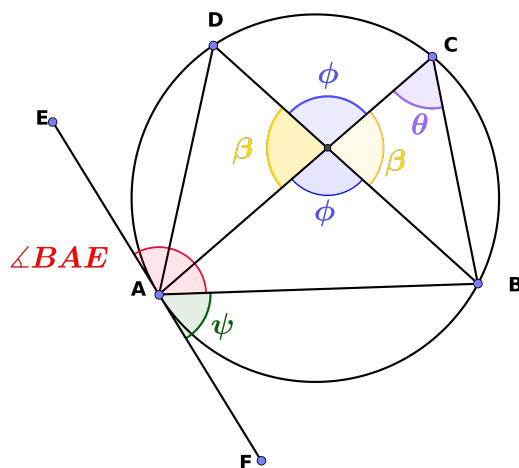
- Determine dominio y el rango de la función.
- Grafique  $f(x - 2)$ ,  $f(2x)$ ,  $2f(x)$
- Escriba la ecuación correspondiente a la función por partes de  $f(x)$



# TEMA 1

## Solución:

Primero se rotulan los demás ángulos en la figura,



Se utilizan los teoremas:

**Teorema 1:**

$$\phi = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CD}) \quad (1)$$

**Teorema 2:**

$$\psi = \frac{1}{2} \widehat{AB} \quad (2)$$

**Ángulo  $\angle BAE$**

| No. | Explicación              | Operatoria                                                   |
|-----|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1   | Ángulos suplementarios,  | $\angle BAE + \angle BAF = 180^\circ$                        |
| 2   | Poner valores numéricos, | $\angle BAE = 180^\circ - \angle BAF = 180^\circ - 75^\circ$ |
| 3   | Simplificar,             | $\angle BAE = 105^\circ$                                     |

**Respuesta:**  $\angle BAE = 105^\circ$

### Ángulo $\phi$

| No. | Explicación                                                      | Operatoria                                             |
|-----|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1   | Utilizar el teorema (2),<br>donde $\psi = \angle BAF = 70^\circ$ | $\widehat{AB} = 2\psi$                                 |
| 2   | Colocar el valor numérico                                        | $\widehat{AB} = 2(75^\circ) = 150^\circ$               |
| 3   | Utilizar el teorema (1),<br>donde $\widehat{CD} = 70^\circ$      | $\phi = \frac{1}{2}(70^\circ + 150^\circ) = 110^\circ$ |

**Respuesta:**  $\phi = 110^\circ$

### Ángulo $\beta$

| No. | Explicación                 | Operatoria                                         |
|-----|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| 1   | Por ángulos suplementarios, | $\beta + \phi = 180^\circ$                         |
| 2   | Simplificar,                | $\beta = 180^\circ - \phi = 180^\circ - 110^\circ$ |

**Respuesta:**  $\beta = 70^\circ$

### Ángulo $\theta$

| No. | Explicación                 | Operatoria                                   |
|-----|-----------------------------|----------------------------------------------|
| 1   | Utilizar el teorema (2),    | $\theta = \frac{1}{2}(\widehat{AB})$         |
| 2   | Utilizar valores numéricos, | $\theta = \frac{1}{2}(150^\circ) = 75^\circ$ |

**Respuesta:**  $\theta = 75^\circ$

## TEMA 2

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto  $(0, 3)$  y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas  $-x + y = 3$  y  $-x - y = 1$ .

**Solución:**

| No. | Explicación                                                    | Operatoria                                           |
|-----|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1   | Se resuelve el sistema de ecuaciones para encontrar el centro. | $\begin{cases} -x + y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ |
| 2   | Sumar las dos ecuaciones,                                      | $-2x = 4 \Rightarrow x = -2$                         |
| 3   | Sustituir $x$ en alguna de las ecuaciones,                     | $y = 3 + x = 3 - 2 = 1$                              |
| 4   | El centro $(h, k)$ es                                          | $(h, k) = (-2, 1)$                                   |
| 5   | Hallar el radio con la fórmula de la distancia,                | $r^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$                    |
| 6   | Poner valores numéricos,                                       | $r^2 = (0 - (-2))^2 + (3 - 1)^2 = 8$                 |
| 7   | Utilizar la ecuación general de la circunferencia,             | $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$                        |
| 7   | Sustituir los valores hallados,                                | $(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 8.$                      |

**Respuesta:** La ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

## TEMA 3

Un tanque tiene 10 metros de largo y su sección transversal es un semicírculo de 4 metros de diámetro, como se muestra en la figura. Calcule:

### a. El volumen total del tanque.

Solución:

Datos:

■  $L = 10 \text{ m}$

■  $r = 2 \text{ m}$

$$V = A \cdot L$$

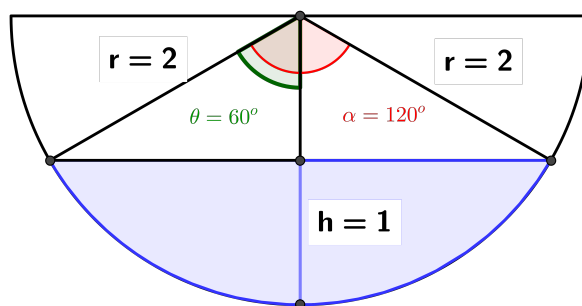
| No. | Explicación          | Operatoria                                                 |
|-----|----------------------|------------------------------------------------------------|
| 1   | Calcular el área,    | $A = \frac{1}{2}\pi r^2$                                   |
| 2   | Colocar los valores, | $A = \frac{1}{2}\pi(2\text{m})^2 = 2\pi \text{ m}^2$       |
| 3   | Calcular el volumen, | $V = (2\pi \text{ m}^2)(10 \text{ m}) = 20\pi \text{ m}^3$ |

**Respuesta:** El volumen total es  $20 \text{ m}^3$ , aproximadamente  $62.8 \text{ m}^3$ .

### b. Volumen de agua cuando la altura de la superficie del agua es $h = 1$ .

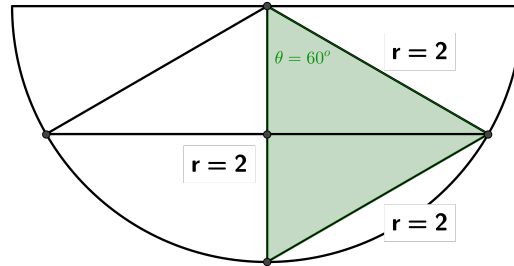
Solución:

El área sombreada es la diferencia entre el área del sector circular y el triángulo isósceles.



$$A = A_{SC} - A_{\Delta}$$

Notar que el área del triángulo isósceles es el mismo que el del equilátero que se muestra a continuación.



| No. | Explicación                                 | Operatoria                                                                                         |
|-----|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Área del sector circular,                   | $A_{SC} = \frac{1}{2}\theta r^2$                                                                   |
| 2   | El ángulo es $120^\circ = 2\pi/3$ radianes, | $A_{SC} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{3} \right) (2 \text{ m})^2 =$                             |
| 3   | Área del sector,                            | $A_{SC} = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^2$                                                              |
| 4   | Área del triángulo equilátero,              | $A_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$                                                               |
| 5   | Área del triángulo,                         | $A_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 \text{ m})^2 = \sqrt{3} \text{ m}^2$                            |
| 6   | Área sombreada,                             | $A = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^2 - \sqrt{3} \text{ m}^2$                                            |
| 7   | Volumen,                                    | $V = A \cdot L = 10 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ m}^3 \approx 24.6 \text{ m}^3$ |

**Respuesta:** El volumen total cuando  $h = 1$  es

$$10 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ m}^3$$

**c. El área del espejo de agua cuando  $h = 1$ .**

**Solución:**

$$A = b \cdot L$$

| No. | Explicación                                                                                 | Operatoria                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 1   | Calcular $b$ . Se utiliza un triángulo rectángulo con catetos 1 m y $b/2$ e hipotenusa 2 m. | $(2)^2 = (1)^2 + (b/2)^2$                                          |
| 2   | Despejar $b$                                                                                | $b = 2\sqrt{3} \text{ m}$                                          |
| 3   | Calcular el área,                                                                           | $A = (2\sqrt{3} \text{ m})(10 \text{ m}) = 20\sqrt{3} \text{ m}^2$ |

**Respuesta:** El área del espejo de agua cuando  $h = 1$  es

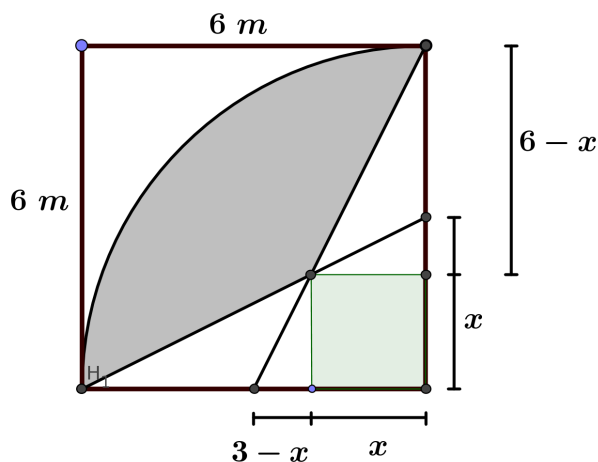
$$20\sqrt{3} \text{ m}^2$$

## TEMA 4

Calcule el área sombreada de la figura que se muestra, si los lados del cuadrado miden 6 metros de longitud.

**Solución:**

Se hacen las relaciones geométricas que se muestran en la siguiente figura:



| No. | Explicación                                           | Operatoria                                                |
|-----|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1   | Calcular $x$ por relaciones de triángulos semejantes, | $\frac{6-x}{x} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$           |
| 2   | Área sombreada,                                       | $A = A_{SC} - 2 \cdot A_{\Delta} - A_{\square}$           |
| 3   | Área del sector circular,                             | $A = A_{SC} = \pi r^2 / 4$                                |
| 4   | Colocar el valor de $r$ ,                             | $A = A_{SC} = \pi (6 \text{ m})^2 / 4 = 9\pi \text{ m}^2$ |

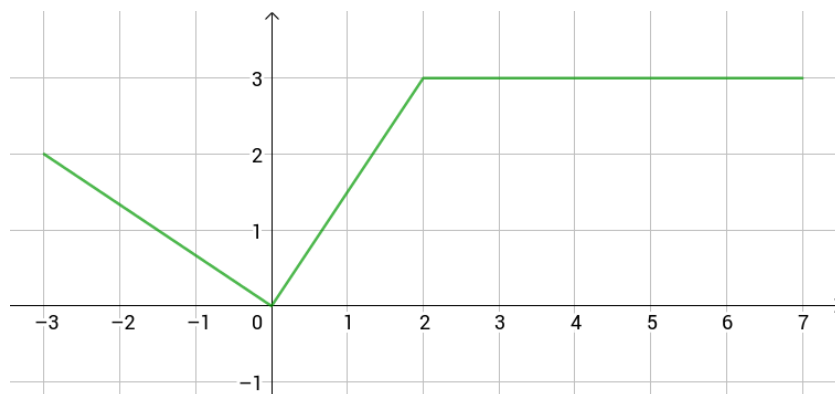
| No. | Explicación                  | Operatoria                                                        |
|-----|------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 5   | Área del triángulo,          | $A_{\triangle} = \frac{1}{2}x(6-x)$                               |
| 6   | Colocar los valores de $x$ , | $A_{\triangle} = \frac{1}{2}(2)(6-2) \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$ |
| 7   | Área del cuadrado,           | $A_{\square} = x^2 = 4 \text{ m}^2$                               |
| 8   | Área sombreada,              | $A = 9\pi \text{ m}^2 - 2(4 \text{ m}^2) - 4 \text{ m}^2$         |
| 9   | Área sombreada,              | $A = (9\pi - 12) \text{ m}^2 \approx 16.3 \text{ m}^2$            |

**Respuesta:** El área sombreada es:

|                               |
|-------------------------------|
| $A = (9\pi - 12) \text{ m}^2$ |
|-------------------------------|

## TEMA 5

Dada la gráfica de la función de  $f(x)$  que se muestra.



**a. Determine el dominio y el rango de la función.**

**Solución:**

En base a la gráfica, el dominio es:

$$-3 \leq x \leq 7$$

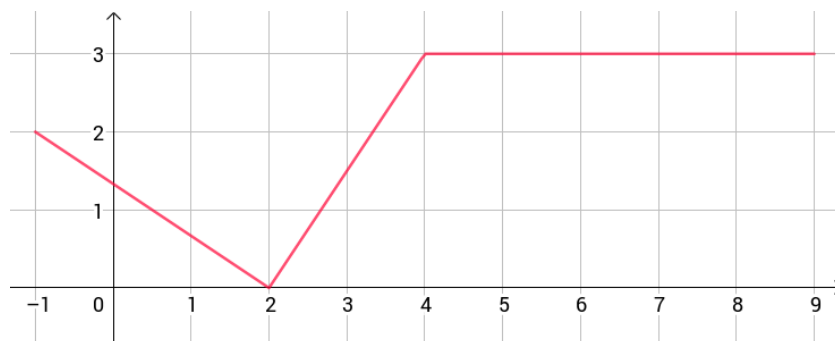
Y el rango es:

$$0 \leq y \leq 3$$

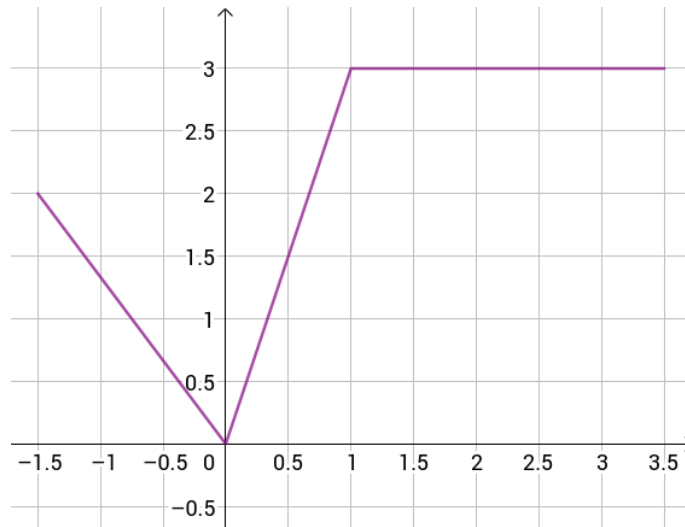
**b. Grafique  $f(x - 2)$ ,  $f(2x)$  y  $2f(x)$ .**

**Solución:**

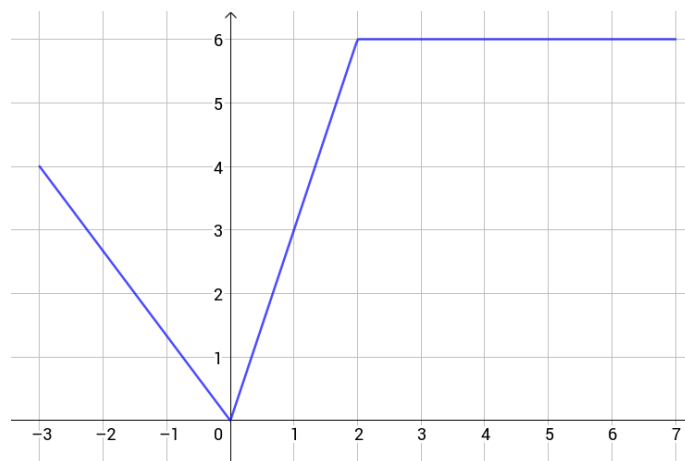
La función  $f(x - 2)$  es la traslación de  $f(x)$  dos unidades a la derecha.



La función  $f(2x)$  es el encogimiento horizontal de  $f(x)$  por un factor de dos.



La función  $2f(x)$  es el estiramiento vertical de  $f(x)$  dos unidades a la derecha.



c. Escriba la ecuación correspondiente a la función por partes de  $f(x)$ .

Solución:

- En  $-3 \leq x \leq 0$ : Recta  $y = m_1x$  con pendiente  $m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 2}{0 - (-3)} = -\frac{2}{3}$
- En  $0 < x \leq 2$ : Recta  $y = m_2x$  con pendiente  $m_2 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$
- En  $2 < x \leq 7$ : Recta constante  $y = 3$

Entonces,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x, & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2}x, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3, & \text{si } 2 < x \leq 7 \end{cases}$$