UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-6-V-1-00-2018

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**4 de Julio de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jose Rodolfo Sic Morales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jose Rodolfo Sic Morales**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Miguel Castillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Guatemala, 4 de julio de 2018 Temario: A

Examen de segunda retrasada

Tema 1: (30 puntos)

a. Resuelva la ecuación: $\sqrt{x+4} - \sqrt[4]{6x+19} = 0$

b. Resuelva la ecuación: $\log_4(x+1) = 2 + \log_4(3x-2)$

c. Resuelva la ecuación: $2\sec x \operatorname{sen} x + 2 = 4 \operatorname{sen} x + \sec x$, para $[0, 2\pi]$

Tema 2: (15 puntos)

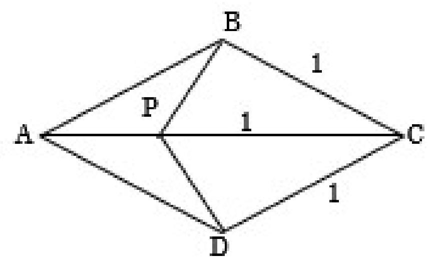
El dueño de una tienda de deportes observa que si el precio de una pelota de futbol es de Q45, se venden 18 pelotas diariamente, mientras que si el precio de venta es de Q55, se venden únicamente 12. Suponiendo que el número de pelotas vendidas es una función lineal del precio de venta,

a. Encuentre la ecuación de la recta y dibuje su representación gráfica.

b. ¿Cuál debe ser el precio de venta si se quieren vender 25 pelotas diariamente?

Tema 3: (20 puntos)

Las tejas de estrella se forman a partir de un rombo *ABCD* con lados de longitud 1 y un ángulo interior de *BAD* de 52°. Primero se ubica el punto *P* de la diagonal *AC* que está a una distancia 1 del vértice *C* y luego se dibujan los segmentos *PB* y *PD*, como se muestra en la figura. Las dos tejas formadas reciben el nombre de dardo y cometa.



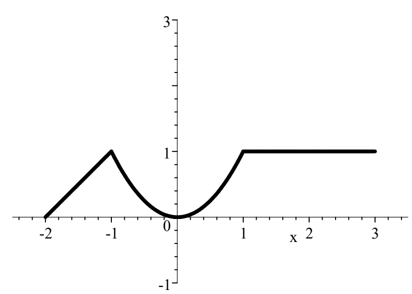
a. Hallar la medida en grados de los ángulos *BPC*, APB y *ABP*.

b. Calcule la longitud del segmento *BP*.

c. Calcule el área del cometa y el área del dardo.

Tema 4: (20 puntos)

La figura muestra la gráfica de una función *f* definida por tres fórmulas



a. Encuentre el dominio y el rango de f.

b. Grafique $2f(x-1)$

c. Grafique $-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

d. Encuentre una función definida por tres fórmulas para *f*

Tema 5: (15 puntos)

Encuentre los elementos principales y trace la gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (30 puntos)

a. Resuelva la ecuación: $\sqrt{x+4} - \sqrt[4]{6x+19} = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a igualar los términos y a elevar ala cuarta ambos lados de la ecuación	$\sqrt{x+4} = \sqrt[4]{6x+19}$ $\left(\sqrt{x+4}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{6x+19}\right)^4$ $(x+4)^2 = 6x+19$
2.	Procedemos a expandir el termino al cuadrado y simplificar los términos.	$(x+4)^2 = 6x+19$ $x^2+8x+16 = 6x+19$ $x^2+2x-3 = 0$
3.	Se procede a resolver la ecuación por el método de factorización para resolver la ecuación.	$x^2+2x-3=0$ $(x-1)(x+3)=0$ $x-1=0 \Rightarrow x=1$ $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

R.// $x = 1\,, x = -3$

b. Resuelva la ecuación: $\log_4(x+1) = 2 + \log_4(3x-2)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede agrupar los términos semejantes de un lado de la ecuacion	$\log_4(x+1) - \log_4(3x-2) = 2$

2.	Utilizamos la siguiente sustitución $\log_a u - \log_a w = \log_a\left(\frac{u}{w}\right).$	$\mathbf{\log_4(x+1) - \log_4(3x-2) = 2}$ $\mathbf{\log_4\left(\frac{x+1}{3x-2}\right) = 2}$
3.	Utilizamos la siguiente sustitución $a^{\log_a u} = u$	$\mathbf{\log_4\left(\frac{x+1}{3x-2}\right) = 2}$ $\mathbf{4^{\log_4\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)} = 4^2}$ $\mathbf{\frac{x+1}{3x-2} = 16}$
4.	Se procede a resolver la ecuación del inciso anterior.	$\mathbf{\frac{x+1}{3x-2} = 16}$ $\mathbf{x+1 = 16(3x-2)}$ $\mathbf{x+1 = 48x-32}$ $\mathbf{47x = 33}$ $\mathbf{x = \frac{33}{47}}$

R.// $\boldsymbol{x = \frac{33}{47}}$

c. Resuelva la ecuación: $2\sec x \operatorname{sen} x + 2 = 4\operatorname{sen} x + \sec x$, para $[0, 2\pi]$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Procedemos agrupar términos	$\mathbf{2\sec x\sin x + 2 = 4\sin x + \sec x}$ $\mathbf{2\sec x\sin x + 2 - 4\sin x - \sec x = 0}$ $\mathbf{2\sin x(\sec x - 2) + 2 - \sec x = 0}$

2.	Se procede a factorizar y resolver la ecuación.	$2\sin x\,(\sec x - 2) + 2 - \sec x = 0$ $2\sin x\,(\sec x - 2) - (\sec x - 2) = 0$ $(2\sin x - 1)(\sec x - 2) = 0$ $2\sin x - 1 = 0$ $2\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $x_1 = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\sec x - 2 = 0$ $\frac{1}{\cos x} = 2$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $x_3 = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$
3.	Se resuelve para la primera raíz con ayuda del seno inverso y el coseno inverso, sin embargo, se debe analizar el circulo unitario para verificar si no hay una segunda solución.	$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ $x_4 = 2\pi - x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

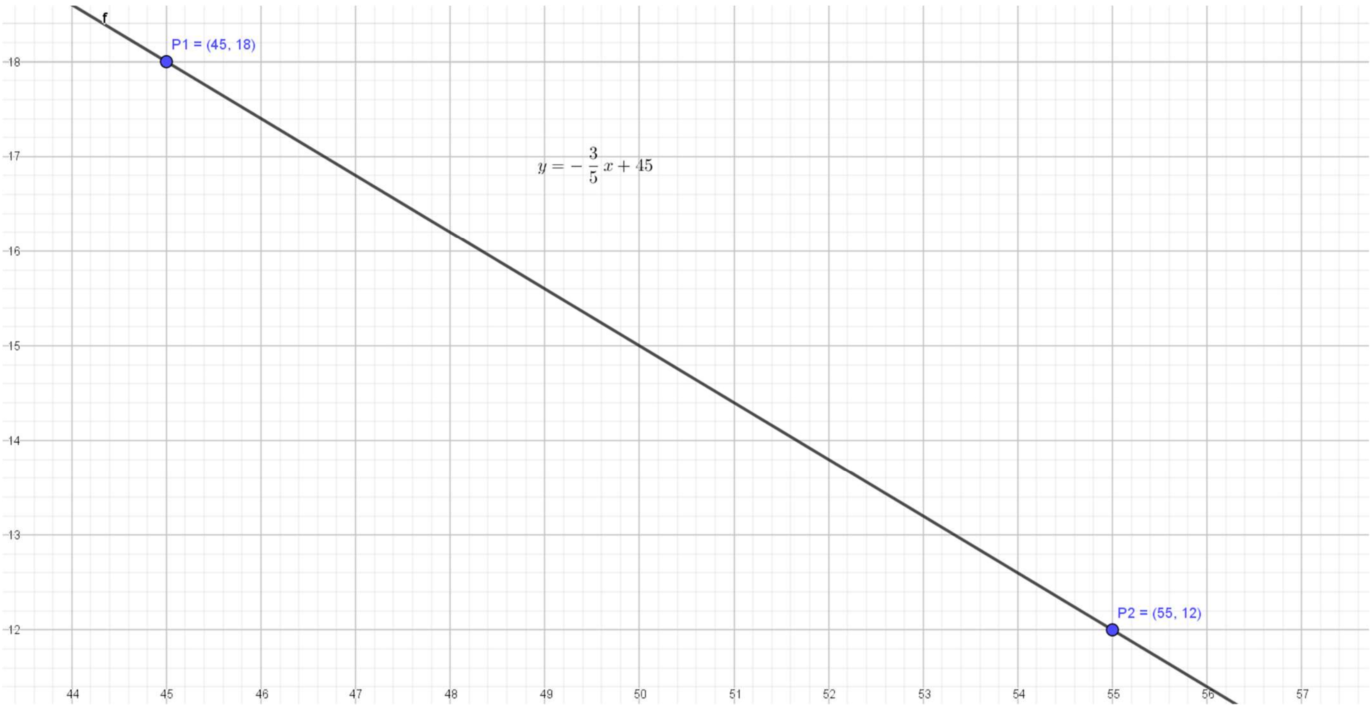
R.// $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

Tema 2: (15 puntos)

El dueño de una tienda de deportes observa que, si el precio de una pelota de futbol es de Q45, se venden 18 pelotas diariamente, mientras que si el precio de venta es de Q55, se venden únicamente 12. Suponiendo que el número de pelotas vendidas es una función lineal del precio de venta,

a. Encuentre la ecuación de la recta y dibuje su representación gráfica.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utilizan los valores proporcionados por el problema para definir los puntos y poder obtener una ecuación. Definiendo el eje "x" como el precio de venta y el eje "y" como la cantidad de pelotas vendidas diariamente	$\boldsymbol{P_1 = (45, 18)}$ $\boldsymbol{P_2 = (55, 12)}$
2.	Procedemos a calcular el valor de la pendiente utilizando los dos puntos definidos en el inciso anterior. $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$	$\boldsymbol{m = \frac{12 - 18}{55 - 45} = -\frac{3}{5}}$
3.	Utilizamos la pendiente y un punto de la recta para obtener la ecuación de la recta.	$\boldsymbol{P_1 = (45, 18)}$ $\boldsymbol{m = -\frac{3}{5}}$ $\boldsymbol{y - 18 = -\frac{3}{5}(x - 45)}$ $\boldsymbol{y = -\frac{3}{5}x + 27 + 18}$ $\boldsymbol{y = -\frac{3}{5}x + 45}$



R.// **Ecuación de la recta** $\boldsymbol{y = -\frac{3}{5}x + 45}$

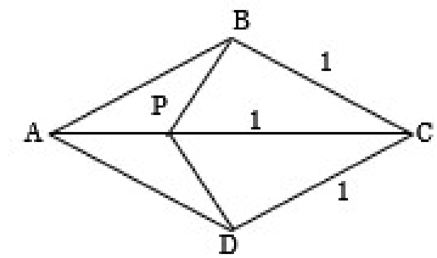
b. ¿Cuál debe ser el precio de venta si se quieren vender 25 pelotas diariamente?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a sustituir el valor de “y=25” en la ecuación de la recta para poder obtener el valor de “x” que representa el precio de venta.	$y = -\frac{3}{5}x + 45$ $25 = -\frac{3}{5}x + 45$ $\frac{3}{5}x = 45 - 25$ $\frac{3}{5}x = 20$ $x = \frac{20 * 5}{3}$ $x = \frac{100}{3} \cong 33.33$

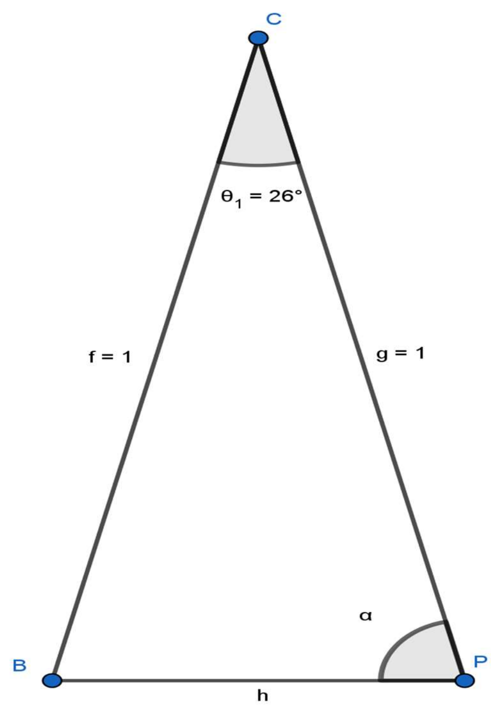
R.// El precio de venta si se quieren vender 25 pelotas diariamente debe ser de Q33.33

Tema 3: (20 puntos)

Las tejas de estrella se forman a partir de un rombo $ABCD$ con lados de longitud 1 y un ángulo interior de BAD de 52°. Primero se ubica el punto P de la diagonal AC que está a una distancia 1 del vértice C y luego se dibujan los segmentos PB y PD, como se muestra en la figura. Las dos tejas formadas reciben el nombre de dardo y cometa.



a. Hallar la medida en grados de los ángulos BPC, APB y ABP.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para hallar la medida del ángulo BPC se procede a analizar el triángulo isósceles que se forma debido a que dos de sus lados poseen la misma longitud	
2.	Procedemos a encontrar el valor del ángulo utilizando la siguiente ecuación, sabiendo que es un triángulo isósceles y que dos de sus ángulos son iguales.	$\boldsymbol{2\alpha + 26° = 180°}$ $\boldsymbol{\alpha = \frac{180° - 26°}{2}}$ $\boldsymbol{\alpha = 77°}$
3.	El ángulo APB se halla utilizando la siguiente ecuación 180˚= APB + BPC	$\boldsymbol{180° = \beta + \alpha}$ $\boldsymbol{\beta = 180° - 77° = 103°}$

4.	El ángulo ABP se halla utilizando la siguiente ecuación 180˚=26˚APB+ABP.	$\mathbf{180° = 26° + \beta + \gamma}$ $\mathbf{180° = 26° + 103° + \gamma}$ $\mathbf{\gamma = 180° - 26° - 103°}$ $\mathbf{\gamma = 51°}$

R.// $\boldsymbol{BPC = 77°, APB = 103°\ , ABP = 51°}$

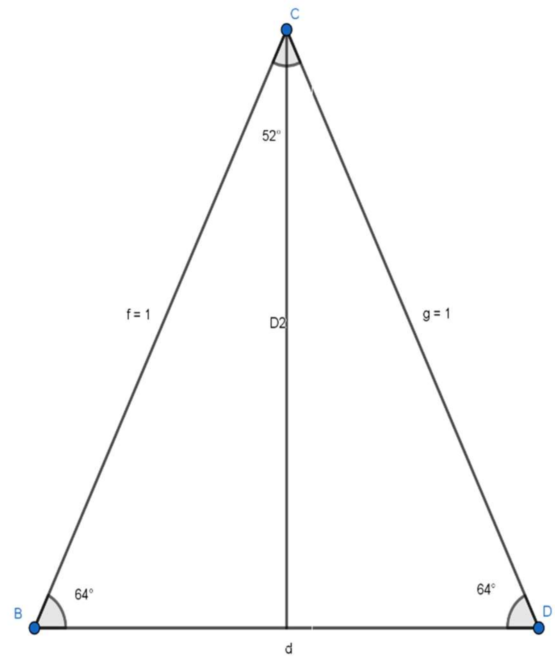
b. Calcule la longitud del segmento BP.

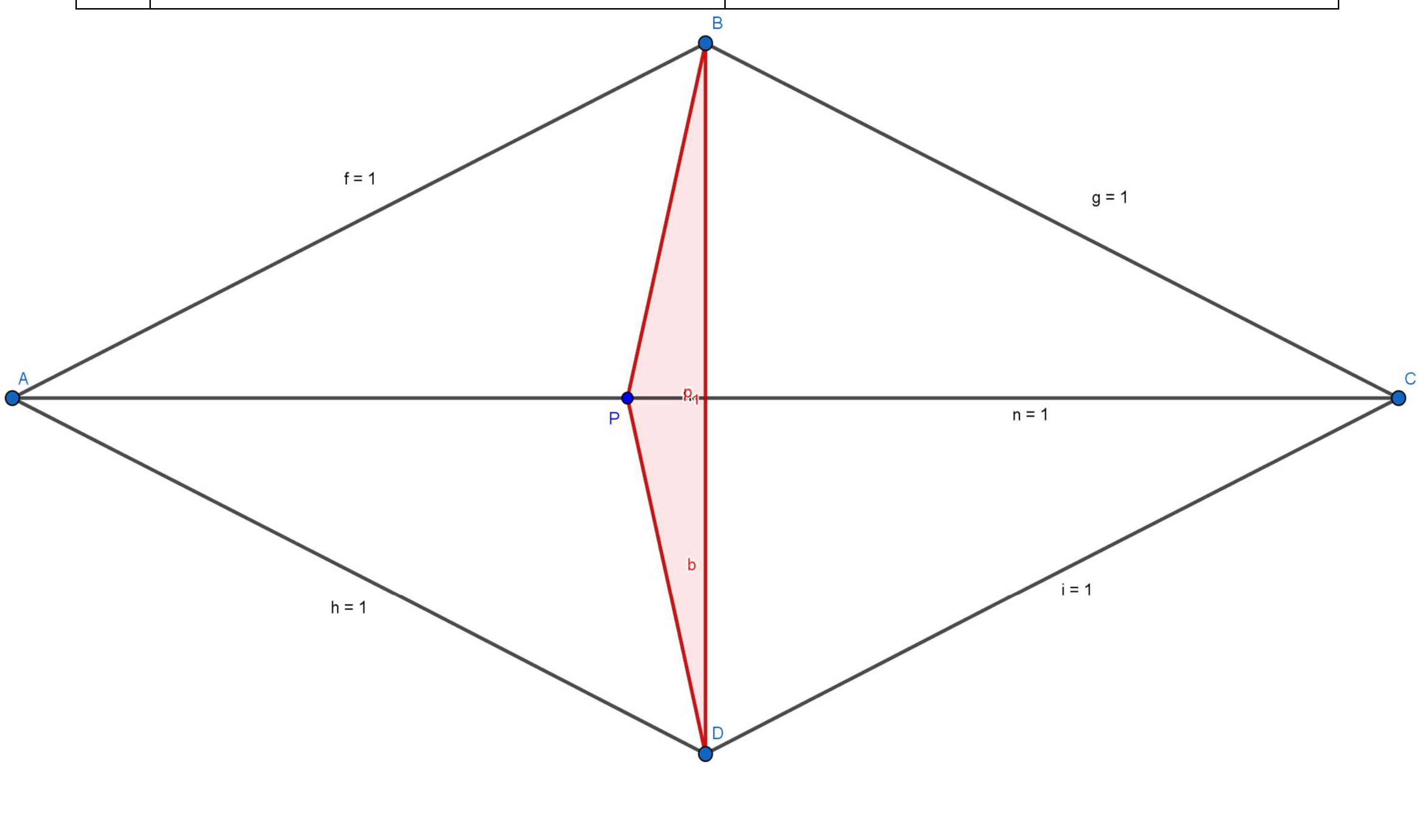
No.	Explicación	Operatoria
1.	Para calcular la longitud del segmento BP, se procede a utilizar el triángulo isósceles obtenido del inciso a.1 aplicando la ley de senos para obtener el valor del segmento deseado.	$\boldsymbol{\frac{sin\,77°}{1} = \frac{sin\,26°}{PB}}$ $\boldsymbol{BP = \frac{sin\,26°}{sin\,77°} \cong 0.4499}$

R.// ***El valor de la longitud del segmento*** $\boldsymbol{BP \cong 0.45}$

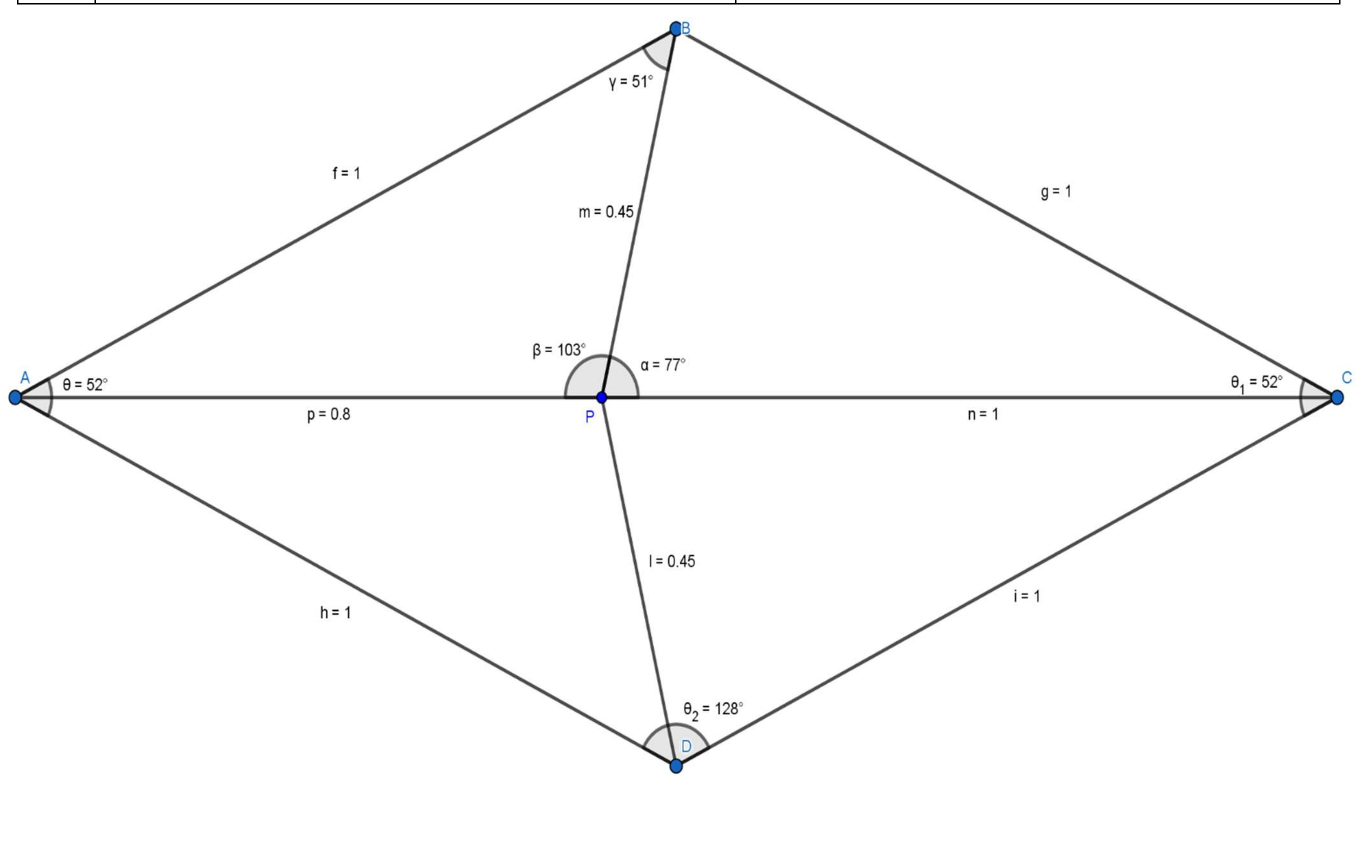
c. Calcule el área del cometa y el área del dardo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a determinar los valores de la diagonal mayor D y diagonal menor d, del rombo.	$\boldsymbol{D = 2\sin 64° \cong 1.7975}$ $\boldsymbol{d = \frac{\sin 52°}{\sin 64°} \cong 0.8767}$

2.	Procedemos a utilizar un lado del rombo para obtener el área de la misma.	
3.	Calculamos el área del triángulo obtenido en el inciso anterior.	$A = \frac{1}{2} d * h$ $A = \frac{1}{2} * 0.8767 * 0.8987$ $A = 0.3940\ u^2$



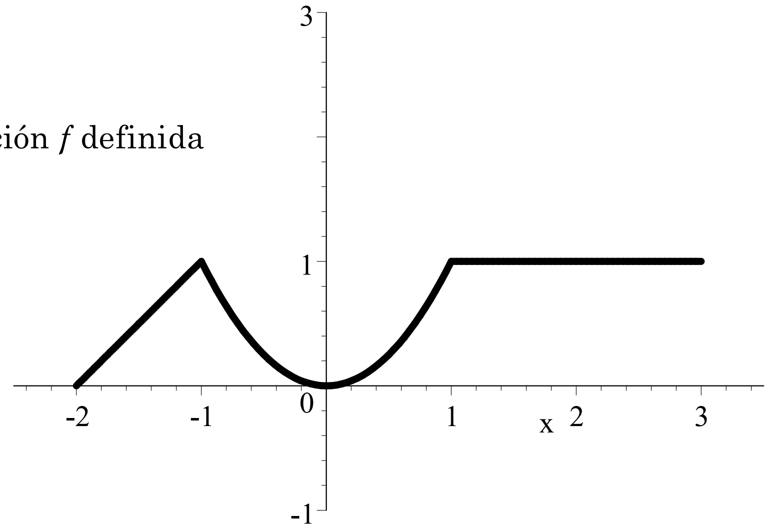
No.	Explicación	Operatoria
4.	Del rombo de la imagen anterior se forma un triángulo en donde la base es la diagonal menor y la altura se obtiene de la resta de la distancia CP menos la altura del triángulo del inciso 2.	$\boldsymbol{h_t = 1 - h}$ $\boldsymbol{h_t = 1 - 0.8987 \cong 0.1012}$
5.	Procedemos a obtener el valor del área del triángulo del inciso anterior.	$\boldsymbol{A_T = \frac{1}{2} * d * h_t}$ $\boldsymbol{A_T = \frac{1}{2} * 0.8767 * 0.1012}$ $\boldsymbol{A_T = 0.0443u^2}$
6.	Procedemos a obtener el área del dardo y del cometa debemos de sumar y restar el área del triángulo del inciso anterior al área del triángulo obtenido de la mitad del rombo	$\boldsymbol{A_d = A - A_T}$ $\boldsymbol{A_d = 0.3949 - 0.0443 = 0.3497u^2}$ $\boldsymbol{A_c = A + A_T}$ $\boldsymbol{A_c = 0.3949 - 0.0443 = 0.4392u^2}$



R.// ***El área del cometa es*** $\boldsymbol{0.4392u^2}$ ***y el área del dardo es de*** $\boldsymbol{0.3497u^2}$

Tema 4: (20 puntos)

La figura muestra la gráfica de una función *f* definida por tres fórmulas



a. Encuentre el dominio y el rango de f.

No.	Explicación	Operatoria
1.	El dominio de una función es el conjunto de todos los valores independientes posibles que una relación puede tener. Es la colección de todas las entradas posibles. El rango de una función es el conjunto de todos los valores dependientes posibles que la relación puede producir. Es la colección de todas las salidas posibles.	$\boldsymbol{D = [-2, 3]}$ $\boldsymbol{R = [0, 1]}$

R.// $\boldsymbol{D = [-2, 3]}$ $\quad$ $\boldsymbol{R = [0, 1]}$

d. Encuentre una función definida por tres fórmulas para *f*

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a definir los intervalos en los cuales la función cambia su comportamiento.	$\boldsymbol{Intervalo1 = [-2, -1]}$ $\boldsymbol{Intervalo2 = (-1, 1)}$ $\boldsymbol{Intervalo3 = [1, 3]}$

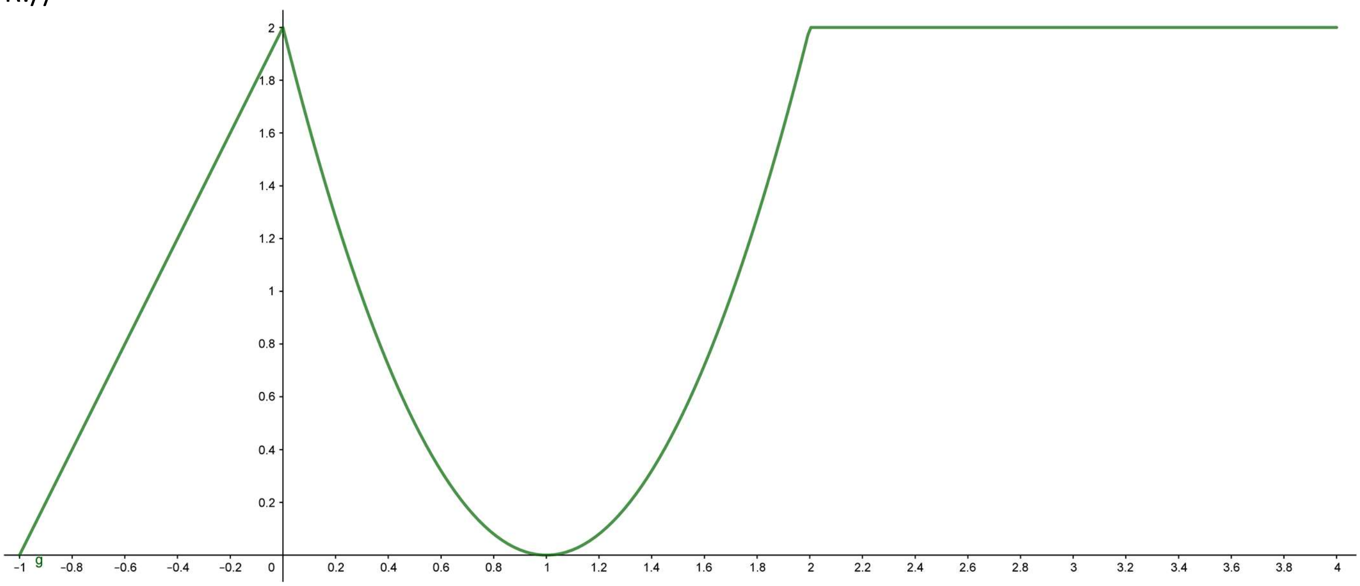
2.	Definidos los intervalos procedemos a identificar el comportamiento de cada uno de los intervalos, se observa que en el intervalo1 la función es una recta y procedemos a encontrar el valor de la pendiente y posteriormente obtener su ecuación.	$\boldsymbol{P_1 = (-2, 0)\,, P_2 = (-1, 1)}$ $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{-1-(-2)} = 1}$ $\boldsymbol{y - 1 = 1(x+1)}$ $\boldsymbol{y = x + 1 + 1}$ $\boldsymbol{y = x + 2}$
3.	Procedemos a observar el comportamiento del intervalo2, en el cual se puede observar que tiene el comportamiento de una parábola con el vértice en el origen.	$\boldsymbol{y = x^2}$
4.	Procedemos a observar el comportamiento del intervalo3, en el cual se puede observar que es una recta con pendiente 0.	$\boldsymbol{y = 1}$

R.//

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & : -2 < x \leq -1 \\ x^2 & : -1 < x < 1 \\ 1 & : 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

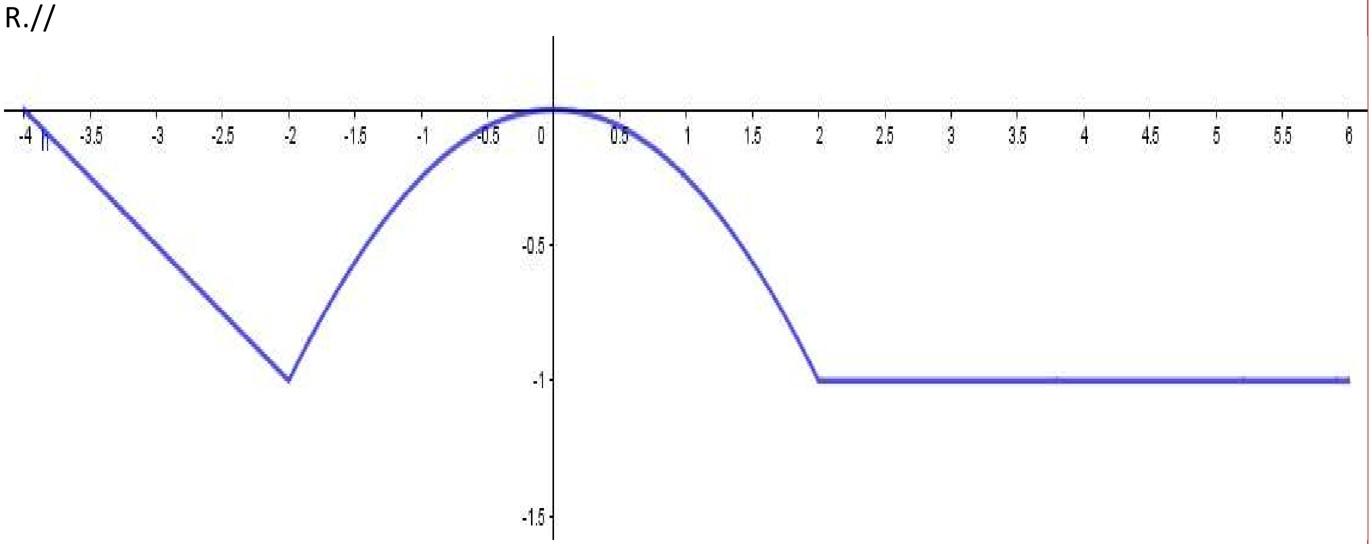
b. Grafique $2f(x-1)$

R.//



c. Grafique $-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

R.//



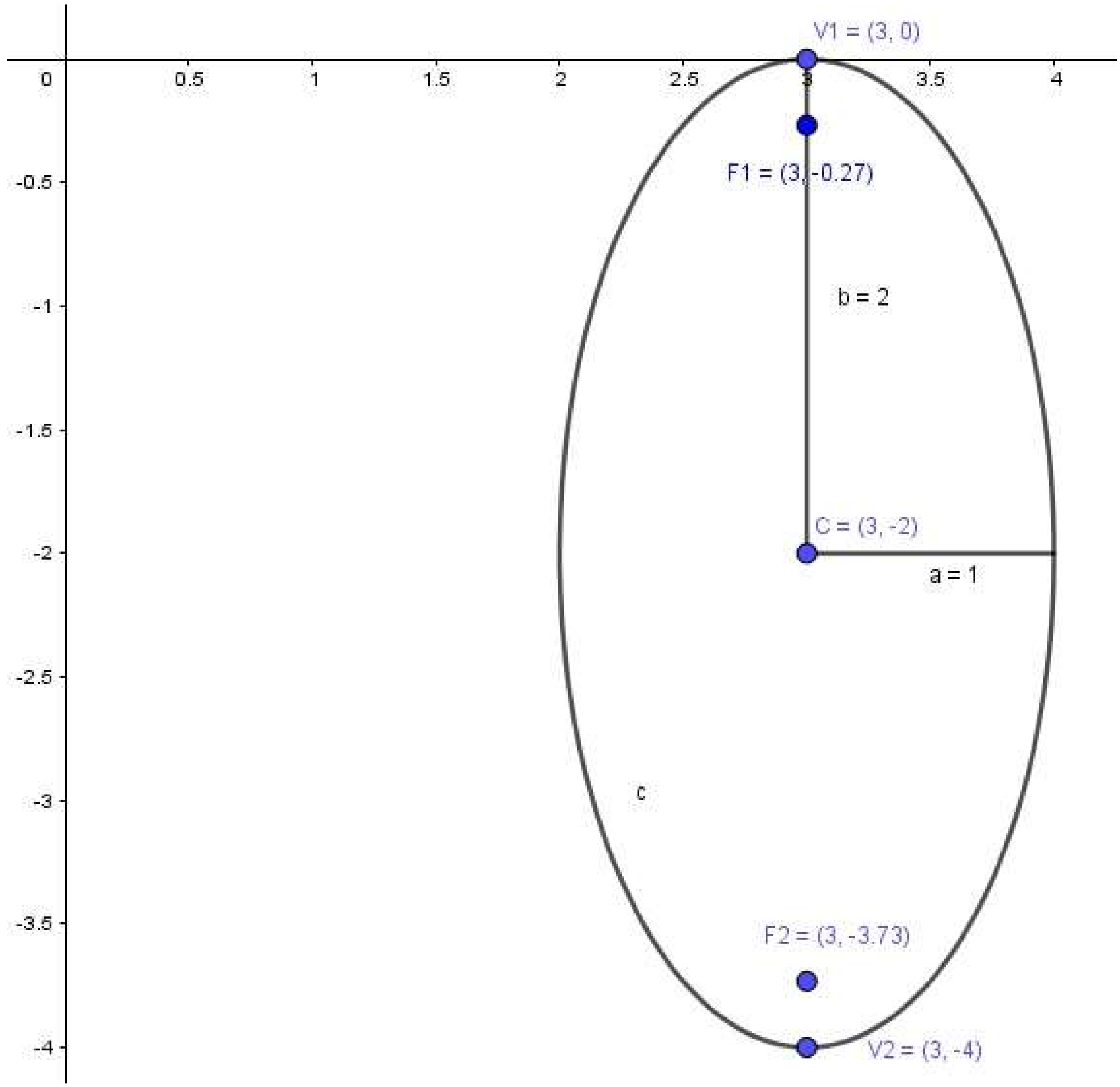
Tema 5: (15 puntos)

Encuentre los elementos principales y trace la gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a realizar las operaciones necesarias para poder obtener la ecuación general de la cónica y poder definir sus elementos. $\frac{(x \pm h)^2}{a^2} \pm \frac{(y \pm k)^2}{b^2} = 1$	$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$ $4x^2 - 24x \quad + y^2 + 4y \quad + 36 = 0$ $4\left(x^2 - 6x \pm \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) + y^2 + 4y \pm \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 36 = 0$ $4\left[x^2 - 6x \pm \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] + y^2 + 4y \pm \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 36 = 0$ $4(x^2 - 6x \pm 9) + y^2 + 4y \pm 4 + 36 = 0$ $4[(x-3)^2 - 9] + (y+2)^2 - 4 + 36 = 0$ $4(x-3)^2 - 36 + (y+2)^2 - 4 + 36 = 0$ $4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad // \div 4$ $\frac{(x-3)^2}{1^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$
2.	De la ecuación obtenida del inciso anterior procedemos a identificar y obtener los elementos principales de la cónica, observando principal mente el signo, nos indica que se trata de una elipse, y el eje mayor del mismo se encuentra en el eje "y".	$Centro = (h, k) = (3, -2)$ $a = 1, \qquad b = 2$ $V = (h, k \pm b)$ $V_1 = (3, -2 + 2) = (3, 0)$ $V_2 = (3, -2 - 2) = (3, -4)$ $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ $F = (h, k \pm c)$ $F_1 = (3, -2 + \sqrt{3}) \cong (3, -0.2679)$ $F_2 = (3, -2 - \sqrt{3}) \cong (3, -3.7320)$

R.// $Centro = (3, -2)$, $a = 1$, $b = 2$, $V_1 = (3, 0)$, $V_2 = (3, -4)$
$c = \sqrt{3}$, $F_1 = (3, -0.2679)$, $F_2 = (3, -3.7320)$


V1 = (3, 0)
F1 = (3, -0.27)
b = 2
C = (3, -2)
a = 1
c
F2 = (3, -3.73)
V2 = (3, -4)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4