

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-3-M-00-2016



CURSO:	Matemática Básica 1
SEMESTRE:	Vacaciones de Junio
CÓDIGO DEL CURSO:	101
TIPO DE EXAMEN:	Tercer examen parcial
FECHA DE EXAMEN:	29 de junio
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Eduardo De Paz
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Eduardo De Paz
COORDINADOR:	Ing. Alfredo Gonzales

Tercer examen parcial, Matutina

TEMARIO B

TEMA 1. (20 puntos)

Dada la siguiente función trigonométrica:

$$g(x) = -4 * \cos \left[\frac{\pi}{3} * x + \pi \right] + 3$$

- Determinar la amplitud
- El periodo
- Angulo de desplazamiento de fase
- Realizar la gráfica

TEMA 2. (40 puntos)

Resuelva lo siguiente:

- $3\log_7(\sqrt[3]{x}) - \log_{49}(x + 42) = 0$
- $5^{x+1} + 22 = 15 * 5^{-x}$
- $8 * \cos^2 x - 22 \cos x - 21 = 0$

TEMA 3. (25 puntos)

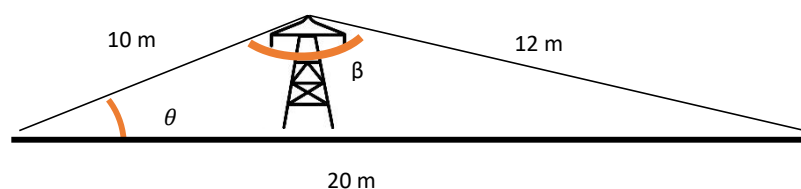
En laboratorio se están realizando estudios acerca de la cantidad de bacterias que se pueden contrarrestar con antibióticos al cabo de determinado tiempo. Se obtuvo una muestra que la primera medición fue a las tres horas teniendo presente 47 bacterias, al pasar 3 horas más decae la población a 22 bacterias. Por lo que se solicita su ayuda para determinar por método matemáticos lo siguiente:

- Determine el número de bacterias al inicio en la muestra
- Plante un modelo del decaimiento de las bacterias en función del tiempo
- Determine el tiempo medio

TEMA 4. (25 puntos)

Se quiere instalar una torre de luz la cual estará sujeta por dos cables de acero para evitar que por la fuerza del aire esta se caiga, los cables están sujetos cada uno a unos tornillos fundidos en el suelo, la distancia entre ambos tornillos es de 20 metros, y el largo del cable izquierdo es de 10 metros mientras el derecho de 12 metros.

- Cuál será el ángulo que se formará entre ambos cables
- Cual debe de ser el ángulo de elevación del cable izquierdo
- De que altura deberá ser la torre de luz.



SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1. (20 puntos)

Dada la siguiente función trigonométrica:

$$g(x) = -4 * \cos \left[\frac{\pi}{3} * x + \pi \right] + 3$$

- Determinar la amplitud
- El periodo
- Angulo de desplazamiento de fase
- Realizar la gráfica

No.	Explicación	Operatoria
1.	Teniendo la ecuación trigonométrica, le hacemos arreglos para que la expresión este lo más claro posible, en este caso podemos hacer factor común dentro del coseno.	$g(x) = -4 * \cos \left[\frac{\pi}{3} * x + \pi \right] + 3$ $g(x) = -4 * \cos \left[\frac{\pi}{3} * (x + 3) \right] + 3$
2.	Ya que la tenemos de esa estructura, llevamos la función a la forma general de una ecuación de modelado armónico	Forma general $f(x) = a * \cos[w(x - c)] + b$ $g(x) = -4 \cos \left[\frac{\pi}{3} * (x + 3) \right] + 3$
3.	Ya con la ecuación en su forma general, identificamos las constantes, para que sea más fácil determinar los valores.	$a: -4$ $w = \frac{\pi}{3}$ $c = 3$ $b = 3$
4.	a) El periodo de la función	El periodo de una función es: $T = \frac{2\pi}{w}$ $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ $T = 6$

5.	b) La amplitud	La amplitud de una función es: $A = a $ $A = -4 $ $A = 4$
6.	c) El ángulo de cambio de fase.	El ángulo de cambio de fase es: $\varphi = c$ $\varphi = 3$
8.	Lo que podemos comprobar mediante la gráfica	$\text{Plot}\left[-4 * \cos\left[\frac{\pi}{3}(x+3)\right] + 3, \{x, -6, 6\}\right]$

TEMA 2. (20 puntos)

Resuelva lo que se le pide:

a) $3\log_7(\sqrt[3]{x}) - \log_{49}(x + 42) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	En esta ecuación es necesario conocer las leyes de los logaritmos y saberlas aplicar en cada momento correspondiente.	$3\log_7(\sqrt[3]{x}) - \log_{49}(x + 42) = 0$
	Lo primero que hacemos es llevar la expresión a la misma base logaritma, en este caso trabajaremos con logaritmo base 7, la conversión a base x se hace de la siguiente forma: $\log_y * \frac{1}{\log_x(y)}$	$\log_7(\sqrt[3]{x})^3 - \frac{\log_{49}(x + 42)}{\log_7(49)} = 0$ $\log_7(x) - \frac{\log_7(x + 42)}{2} = 0$
	Ya que tenemos una expresión elevamos ambos lados por su base para eliminar los logaritmos,	$7^{\log_7(x)} = 7^{\log_7(\sqrt{x+42})}$
	tenemos una ecuación cuadrática simple de resolver, la cual nos queda de la siguiente expresión y procedemos a resolverla	$x = \sqrt{x + 42}$ $x^2 = x + 42$ $x^2 - x - 42 = 0$ $x_1 = 7$ $x_2 = -6$
	Como un logaritmo no puede ser evaluado a un número negativo la única solución para la ecuación es x1	X2= NO SOLUCIÓN

R.	$3\log_7(\sqrt[3]{x}) - \log_{49}(x + 42) = 0$ $x = 7$
----	--

b) $5^{x+1} + 22 = 15 * 5^{-x}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La ecuación dada, separamos sus términos para dejarla en una forma estándar:	$5^{x+1} + 22 = 15 * 5^{-x}$ $5^x * 5^1 + 22 - \frac{15}{5^x} = 0$
2.	Se hace mínimo común múltiplo en el denominador, de esta forma nos queda la expresión como una sola división la cual es más fácil despejar.	$\left[5^x * 5^1 + 22 - \frac{15}{5^x} = 0 \right]$ $\left[\frac{5^{x^2} * 5^1 + 22 * 5^x - 15}{5^x} = 0 \right]$
3.	Como la expresión esta igualada a cero, el numerador nos queda como una sola expresión la cual por fines prácticos se puede hacer una sustitución en los términos	$5 * 5^{x^2} + 22 * 5^x - 15 = 0$
4.	Como observamos es una ecuación cuadrática	$5 * u^2 + 22 * u - 15 = 0$
5.	Resolviendo la ecuación tenemos nuestros resultados, ahora solo encontramos los valores para "x", por ser cuadrática tenemos dos soluciones y las evaluamos.	$u1 = \frac{3}{5}; \quad 5^x = \frac{3}{5}; \quad x = \log_5\left(\frac{3}{5}\right)$ $u2 = -5; \quad 5^x = 5; \quad \text{No tiene solución}$

R.	$5^{x+1} + 22 = 15 * 5^{-x}$ $X = \text{Log}_5\left(\frac{3}{5}\right)$	

a) $8 * \cos^2 x - 22 \cos x - 21 = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Esta es una ecuación trigonométrica, la cual es muy compleja resolverla de forma directa, por lo que se hace es hacer una sustitución y apreciar el comportamiento.	$8 * \cos^2 x - 22 \cos x - 21 = 0$ $u = \text{Cos}[x]$ $8 * u^2 - 22 * u - 21 = 0$
2.	Es una ecuación cuadrática que podemos resolver por factorización teniendo dos soluciones, las cuales las evaluamos en la expresión sustituida y encontramos la solución que satisface la ecuación	$u1 = \frac{7}{2}$ $u2 = -\frac{3}{4}$ $\cos[x] = -\frac{3}{4}$ $x = \cos^{-1} - \frac{3}{4}$ $x = 0.72273 \text{ Rad}$

TEMA 3. (25 puntos)

En laboratorio se están realizando estudios acerca de la cantidad de bacterias que se pueden contrarrestar con antibióticos al cabo de determinado tiempo. Se obtuvo una muestra que la primera medición fue a las tres horas teniendo presente 47 bacterias, al pasar 3 horas más decae la población a 22 bacterias. Por lo que se solicita su ayuda para determinar por método matemáticos lo siguiente:

- Determine el número de bacterias al inicio en la muestra
- Plante un modelo del decaimiento de las bacterias en función del tiempo
- Determine el tiempo medio

No.	Explicación	Operatoria										
1.	La expresión matemática del decaimiento de una población está dada por esta expresión	$P(t) = P_o e^{-rt}$										
2.	Nosotros conocemos dos coordenada de puntos según el comportamiento de las bacteria, las cuales se describen en la tabla, sin embargo no conocemos el número de bacterias que teníamos al inicio y tampoco el tiempo de vida media.	<table><tr><th>Tiempo</th><th>Bacterias</th></tr><tr><td>0</td><td>X</td></tr><tr><td>3</td><td>47</td></tr><tr><td>6</td><td>22</td></tr><tr><td>$t_{1/2}$</td><td>x/2</td></tr></table>	Tiempo	Bacterias	0	X	3	47	6	22	$t_{1/2}$	x/2
Tiempo	Bacterias											
0	X											
3	47											
6	22											
$t_{1/2}$	x/2											
3.	Ya que tenemos estos datos podemos sustituir en la expresión inicial	$47 = P_o e^{-3r}$ $P_o = \frac{47}{e^{-3r}}$										
4.	Pero como tenemos una sola ecuación y de incógnita tenemos la cantidad inicial y la constante r, es necesario un sistema de ecuaciones para ambas incógnitas, el cual lo generamos a partir del otro dato brindado	$22 = P_o e^{-6r}$ $P_o = \frac{22}{e^{-6r}}$										
5.	Ya que tenemos las dos ecuaciones procedemos a resolverlas, del método igualando y despejando una incógnita	$\frac{47}{e^{-3r}} = \frac{22}{e^{-6r}}$ $\frac{e^{-6r}}{e^{-3r}} = \frac{22}{47}$										

	para posteriormente evaluarla y tener ambas soluciones	$e^{3r} = \frac{22}{47}$ $r = \frac{\ln\left(\frac{22}{47}\right)}{3}$ $r = 0.25304$
4.	Ahora sustituimos en una de las ecuaciones	$P_0 = \frac{47}{e^{-3 \cdot 0.25304}}$ $P_0 = 100.41$
6.	Conociendo ambas incógnitas ya podemos conocer la expresión matemática, que modela el comportamiento de las bacterias.	$P(t) = 100 * e^{-0.25304 \cdot t}$

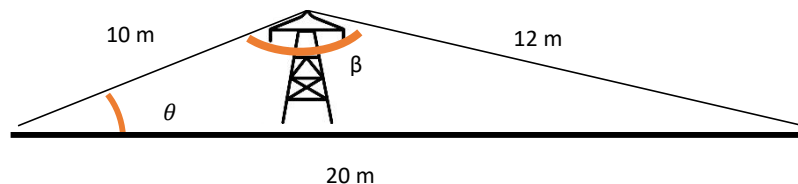
R./

$$P(t) = 100 * e^{-0.25304 \cdot t}$$

TEMA 4. (25 puntos)

Se quiere instalar una torre de luz la cual estará sujeta por dos cables de acero para evitar que por la fuerza del aire esta se caiga, los cables están sujetos cada uno a unos tornillos fundidos en el suelo, la distancia entre ambos tornillos es de 20 metros, y el largo del cable izquierdo es de 10 metros mientras el derecho de 12 metros.

- Cuál será el ángulo que se formará entre ambos cables
- Cual debe de ser el ángulo de elevación del cable izquierdo
- De que altura deberá ser la torre de luz



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Como conocemos las variables y tenemos el diagrama del problema, procedemos a la aplicación de ecuaciones matemáticas Como nos piden conocer el ángulo de un triángulo que no es rectángulo, utilizamos la Ley de cosenos	$20^2 = 10^2 + 12^2 - 2(10)(12) * \cos[\beta]$ $\frac{20^2 - 10^2 - 12^2}{-2(10)(12)} = \cos[\beta]$
2	En la ley de cosenos, despejamos el ángulo beta que es el que solicitan en el primer inciso	$\cos[\beta] = \frac{13}{20}$ $\beta = \cos^{-1} \frac{13}{20}$ $\beta = 130.54^\circ$
3	En el siguiente inciso nos solicitan determinar un ángulo, en el que solo conocemos un lado, en este caso es necesario utilizar la ley de senos	$\frac{\sin(\theta)}{12} = \frac{\sin(130.5416)}{20}$ $\sin(\theta) = 0.45596$ $\theta = \sin^{-1}(0.45596)$ $\theta = 27.12^\circ$
4	En la que conocemos la distancia opuesta y otro ángulo, al sustituir los datos despejamos el ángulo solicitado	

5	Ya que conocemos el ángulo, a partir de las relaciones trigonométricas podemos encontrar la altura de la torre de luz, como bien sabemos que $\text{Sen}(\theta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\begin{aligned}\text{sen}(27.12675) &= \frac{h}{10} \\ h &= 10 * \text{sen}(27.12675) \\ h &= 4.5596 \text{ m}\end{aligned}$
---	---	---

La altura de la torre debe de ser de 4.56 metros