UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-2-M-1-06-2016

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Vacaciones Junio**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**17 de junio del 2016**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Pablo Méndez**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Pablo Méndez**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

17 de junio del 2016 **SEGUNDO EXAMEN PARCIAL** **TEMARIO B2**

TEMA1. (20 puntos)

Dada la función $h(x) = 2\sqrt{x-2} - 3$

a) Dominio y rango de la función
b) La función inversa de la función dada indicando claramente su dominio y rango.
c) Grafique en un mismo plano tanto $h(x)$ como $h^{-1}(x)$
d) Determine $hoh^{-1}(x)$

TEMA 2: (20 puntos)

Dado el polinomio $h(x) = 6x^4 - 32x^3 + 55x^2 - 15x$ entonces:

a) Determine las posibles raíces racionales
b) Aplicando la regla de signos de descartes, indique mediante una tabla las posibles combinaciones de rices nulas, positivas, negativas, y complejas del polinomio
c) Calcule las raíces del polinomio mediante división sintética

TEMA 3: (20 puntos)

Sea Q(x) un polinomio con coeficientes reales de grado 7, que satisface las siguientes condiciones: raíces x = {0: 1 multiplicidad 3; -2 de multiplicidad 2; -3/2}; además la función pasa por el punto (-1, -8). Determine la ecuación del polinomio en su forma factorizada. Haga un esbozo de la gráfica del polinomio.

TEMA 4: (20 puntos)

Determine la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia cuya ecuación es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$ y el punto $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$. Grafique en un mismo plano cartesiano la circunferencia y la recta.

TEMA 5: (20 puntos)

La figura muestra las gráficas de las funciones acotadas $f(\mathrm{x})\ y\ g(x)$. Sin encontrar las ecuaciones, determine lo siguiente:

a) Las soluciones de la ecuación $f(\mathrm{x}) = 3$
b) El máximo y mínimo de la función $g(x)$

Grafique lo siguiente

c) $(f+g)(x)$
d) $y = -2g(-x)$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

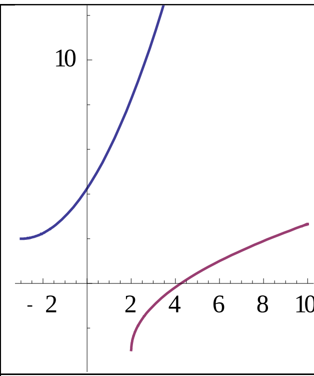
SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA1. (20 puntos)

Dada la función $h(x) = 2\sqrt{x-2} - 3$

e) Dominio y rango de la función
f) La función inversa indicando dominio y rango
g) Grafique en un mismo plano tanto $h(x)$ como $h^{-1}(x)$
h) Determine $hoh^{-1}(x)$

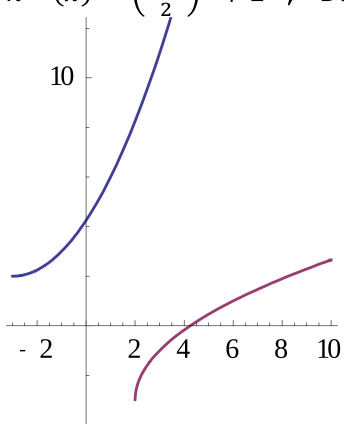
No.	Explicación	Operatoria
1.	Para el dominio se sabe que no existen raíces negativas, por lo tanto 'x' no puede ser menor que 2.	D: [2, ∞)
2.	El rango se obtiene sabiendo que esta función está restringida por la raíz, así que los valores en el eje 'y' van desde -3	R: [-3, ∞)
3.	La función inversa se determina despejando la variable 'x'	$y = 2\sqrt{x-2} - 3$ $y + 3 = 2\sqrt{x-2}$ $\frac{y+3}{2} = \sqrt{x-2}$ $\left(\frac{y+3}{2}\right)^2 = x - 2$ $\left(\frac{y+3}{2}\right)^2 + 2 = x$
4.	Se realiza un cambio de variable, cambiando 'y' por 'x'	$h^{-1}(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 2$
5.	Dado que es una función inversa, no se toma el dominio y rango de la función como tal sino que depende de la restricción que se tenía desde un principio con la función original.	D: [-3, ∞) R: [2, ∞)

6.	La gráfica de ambas funciones quedará así	
7.	La función $hoh^{-1}(x)$ queda así	$hoh^{-1}(x) = 2\sqrt{\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 2\right) - 2} - 3$ $hoh^{-1}(x) = 2\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} - 3$ $hoh^{-1}(x) = 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3$ $hoh^{-1}(x) = x + 3 - 3$ $hoh^{-1}(x) = x$

Respuestas:

a) D: [2, ∞), R: [-3, ∞)

b) $h^{-1}(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 2$, D: [-3, ∞), R: [2, ∞)



c)

d) $hoh^{-1}(x) = x$

TEMA 2: (20 puntos)

Dado el polinomio $h(x) = 6x^4 - 32x^3 + 55x^2 - 15x$ entonces:

d) Determine las posibles raíces racionales

e) Aplicando la regla de signos de descartes, indique mediante una tabla las posibles combinaciones de rices nulas, positivas, negativas, y complejas del polinomio

f) Calcule las raíces del polinomio mediante división sintética

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Para determinar las posibles raíces racionales, se ubica en el polinomio:
p=6
q=15
Obteniendo todos los múltiplos posibles de cada uno.</td><td>$p = \pm 1,2,3,6$
$q = \pm 1,3,5,15$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se realiza la división q/p</td><td>$\frac{q}{p} = \pm 15, 5, \frac{15}{2}, \frac{15}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3,1$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Para la regla de signos de Descartes se cuentan los cambios de signo en la función, tomando las x positivas y negativas.</td><td>$h(x) = 6x^4 - 32x^3 + 55x^2 - 15x$

Son 3 cambios de signo:

3 o 1 raíz real positiva</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se cuentan los cambios de signo cuando x es negativa.</td><td>$h(-x) = 6(-x)^4 - 32(-x)^3 + 55(-x)^2 - 15(-x)$
$h(-x) = 6x^4 + 32x^3 + 55x^2 + 15x$

Ningún cambio de signo,

Cero raíces reales negativas</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Se sabe que hay una raíz nula, y la tabla queda así.</td><td><table><tr><td>+</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>-</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>Null</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>I</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>T</td><td>4</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Para la división sintética primero factorizamos</td><td>$h(x) = 6x^4 - 32x^3 + 55x^2 - 15x$
$h(x) = x(6x^3 - 32x^2 + 55x - 15)$</td></tr>
</table>

6.	Al obtener la primera raíz, se realiza la división sintética.	$$\begin{array}{r\|rrrr} 1/3 & 6 & -32 & 55 & -15 \\ & & 2 & -10 & 15 \\ \hline & 6 & -30 & 45 & 0 \end{array}$$
7.	Las demás raíces son irreales, por lo tanto se obtienen mediante la ecuación cuadrática	$$h(x) = 6x^2 - 30x + 45$$ $$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(6)(45)}}{2(6)}$$ $$\mathrm{x} = \frac{30 \pm \sqrt{-180}}{12}$$ $$\mathrm{x} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$$ $$\mathrm{x} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$$

Respuestas

a) $\pm 15, 5, \frac{15}{2}, \frac{15}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 1$

b)

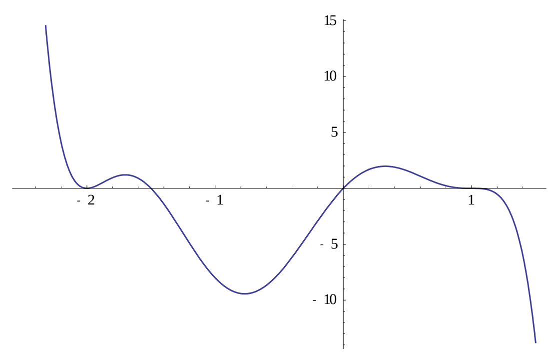
+	3	1
-	0	0
Null	1	1
I	0	2
T	4	4

c)

$$\mathrm{x} = 0$$
$$\mathrm{x} = \frac{1}{3}$$
$$\mathrm{x} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$$
$$\mathrm{x} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$$

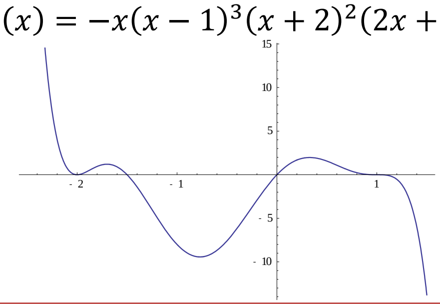
TEMA 3: (20 puntos)

Sea Q(x) un polinomio con coeficientes reales de grado 7, que satisface las siguientes condiciones:
raíces x={0: 1 multiplicidad 3; -2 de multiplicidad 2; -3/2}; además la función pasa por el punto (-1, -8). Determine la ecuación del polinomio en su forma factorizada. Haga un esbozo de la gráfica del polinomio.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Según los datos que se tienen, se forma el polinomio de la siguiente manera.	$Q(x) = a(x-0)(x-1)^3(x+2)^2(2x+3)$
2.	Evaluando el punto dado para encontrar ‘a’	$Q(-1) = a(-1)(-1-1)^3(-1+2)^2(2(-1)+3)$ $Q(-1) = a(-1)(-8)(1)(1)$ $a = -\frac{8}{8}$ $a = -1$
3.	El polinomio queda así.	$Q(x) = -x(x-1)^3(x+2)^2(2x+3)$
4.	El esbozo de la gráfica queda así. Debido a que el grado es impar, entra por un lado y sale por otro. En x=2 solo “toca” y luego regresa por ser grado 2 En x=3/2 si atraviesa el eje ‘y’ En x=0 atraviesa el eje ‘y’ En x=1 por ser cúbica, lo atraviesa pero creando casi una tangente en el eje ‘y’	

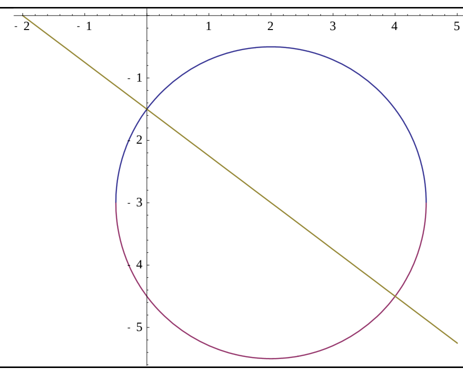
R./ El polinomio y su grafica quedan asi:

$$Q(x) = -x(x-1)^3(x+2)^2(2x+3)$$



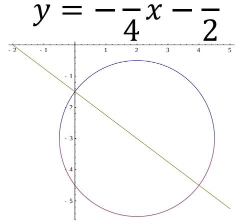
TEMA 4: (20 puntos)

Determine la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia cuya ecuación es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$ y el punto $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$. Grafique en un mismo plano cartesiano la circunferencia y la recta.

No	Explicación	Operatoria
1	Primero completamos cuadrados en la ecuación de la circunferencia para hallar centro y radio.	$4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$ $(4x^2 - 16x) + (4y^2 + 24y) + 27 = 0$ $4(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) = -27 + 16 + 36$ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{25}{4}$
2	Por lo tanto el centro y radio son	$C\ (2, -3) \quad radio = \frac{5}{2}$
3	Para la ecuación de la recta piden que pase por el centro y el punto (0,-3/2), entonces encontramos la pendiente	$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{-3 - -3/2}{2 - 0} = -\frac{3}{4}$
4	La ecuación de la recta	$y - y0 = m(x - x0)$ $y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$ $y + 3 = -\frac{3}{4}(x - 2)$ $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
5	La gráfica queda	

R./ La ecuación de la recta y la gráfica son

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$



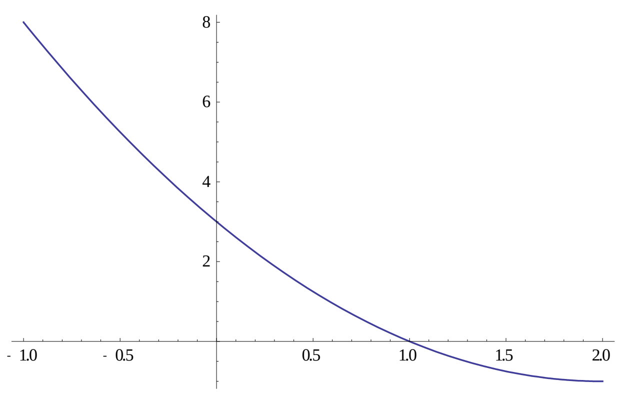
TEMA 5: (20 puntos)

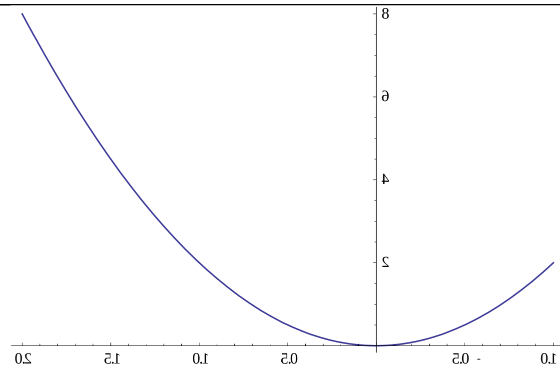
La figura muestra las gráficas de las funciones acotadas $f(\mathrm{x})$ y $g(x)$. Sin encontrar las ecuaciones, determine lo siguiente:

e) Las soluciones de la ecuación $f(\mathrm{x}) = 3$
f) El máximo y mínimo de la función $g(x)$

Grafique lo siguiente

g) $(f+g)(x)$
h) $y = -2g(-x)$

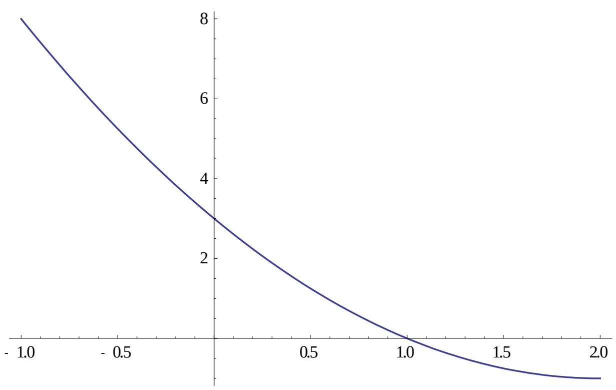
<table>
<tr><th>No</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Observando la gráfica, se encuentran los valores de x donde su solución sea 3</td><td>$x = 0$, $x = 2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>El máximo y minimo de la función $g(\mathrm{x})$ se toma en cuenta únicamente lo que se observa en la gráfica.</td><td>Máximo (0, 0)
Mínimo (2, 4)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Para graficar $(f+g)(x)$ es conveniente realizar una tabla con los datos.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th><th>f+g</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>----</td><td>-1</td><td>-----</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>-4</td><td>-1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>La gráfica queda así</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Para graficar $-2g(-x)$
Se utiliza nuevamente la tabla</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>-x</th><th>g(x)</th><th>2g(x)</th><th>-2g(x)</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-2</td><td>-4</td><td>-8</td><td>8</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	La gráfica queda así	

Respuestas

a) $x = 0$, $x = 2$

b) Máximo (0, 0) Mínimo (2, 4)

c) 

d)