UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-4-V-1-00-2018

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**10 de mayo de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jose Rodolfo Sic Morales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jose Rodolfo Sic Morales**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Miguel Castillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Examen Final

Temario V

Tema 1: (20 puntos)

a. Resuelva la ecuación

$$2\text{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0 \quad \text{para } [0,\, 2\pi)$$

b. Demuestre la identidad trigonométrica

$$2\tan x \sec x = \frac{1}{1 - \text{sen}\, x} - \frac{1}{1 + \text{sen}\, x}$$

Tema 2: (20 puntos)

Dada la siguiente función racional: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 9x^2 + 3x - 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

a. Si existe determine, la coordenada del agujero .

b. Encuentre los puntos de intersección en el eje x e intersección en el eje y.

c. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

d. Trace la gráfica, indicando la tendencia y el agujero.

Tema 3: (20 puntos)

Encuentre el centro, los vértices, focos, asíntotas si las tiene y dibuje la representación gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$$

Tema 4: (20 puntos)

Desde un barco que navega hacia un faro, se observa que el ángulo de elevación a la parte más alta del faro es de 15^0. Cuando el barco se ha desplazado 100 metros hacia el faro el ángulo de elevación es de 23^0,

a. Calcular la altura del faro.

b. Calcule la distancia a la que se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda observación.

Tema 5: (20 puntos)

Por cual punto de la altura de un cono circular recto de altura 16 cm y radio 5cm, debe pasar un plano paralelo a la base, de tal forma que limite un cono cuyo volumen se la mitad del cono original.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 puntos)

a. Resuelva la ecuación

$$2\operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0 \quad \text{para } [0,\, 2\pi)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizamos la siguiente sustitución $\boldsymbol{sen^2}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{cos^2}(\boldsymbol{x})$ para la ecuación original.	$\mathbf{2}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos^2}(\boldsymbol{x})\right) - \mathbf{1} - \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
2.	Procedemos a realizar la operatoria y simplificación necesaria.	$\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{1} - \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ $\mathbf{1} - \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{2}\boldsymbol{cos^2}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$
3.	Utilizamos la siguiente sustitución $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})$.	$\mathbf{1} - \boldsymbol{u} - \mathbf{2}\boldsymbol{u^2} = \mathbf{0}$
4.	Factorizamos la ecuación y encontramos los valores para "u".	$(\boldsymbol{u} + \mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{u} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{u} + \mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{u} = -\mathbf{1}$ $\mathbf{2}\boldsymbol{u} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{u} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
5.	Sustituimos el valor de "u" por su valor original y despejamos para obtener el valor de "x".	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{cos^{-1}}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{cos^{-1}}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$
6.	Debido a que $\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})$ posee dos resultados, uno en el primer cuadrante y otro en el cuarto cuadrante, realizamos la siguiente operación para obtener el segundo resultado.	$\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi} - \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = \dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

R.// $\boldsymbol{x = \pi\ , x = \frac{\pi}{3}\ , x = \frac{5\pi}{3}}$

b. Demuestre la identidad trigonométrica

$$2\tan x \sec x = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se procede a demostrar la ecuación transformando un lado de la ecuación hasta obtener la forma del otro lado de la ecuación, seleccionaremos el lado derecho para realizar la demostración.	$\boldsymbol{\frac{1}{1-sen(x)} - \frac{1}{1+sen(x)}}$
2.	Realizamos resta de fracciones.	$\boldsymbol{\frac{1\big(1+sen(x)\big)-1(1-sen(x))}{[1-sen(x)][1+sen(x)]}}$
3.	Realizamos las operaciones.	$\boldsymbol{\frac{1+sen(x)-1+sen(x)}{1+sen(x)-sen(x)-sen^2(x)}}$
4.	Simplificamos la expresión.	$\boldsymbol{\frac{2sen(x)}{1-sen^2(x)}}$
5.	Realizamos la siguiente sustitución $\boldsymbol{cos^2(x) = 1 - sen^2(x)}$ y utilizamos las transformaciones necesarias para obtener el resultado deseado.	$\boldsymbol{\frac{2sen(x)}{cos^2(x)} = \frac{2sen(x)}{cos(x)} \cdot \frac{1}{cos(x)}}$ $\boldsymbol{= 2\,tan(x)\,sec(x)}$
6.	Queda demostrado.	$\boldsymbol{2tan(x)sec(x) = \frac{1}{1-sen(x)} - \frac{1}{1+sen(x)}}$

R.// $\therefore$ ***Verdadero***

Tema 2: (20 puntos)

Dada la siguiente función racional: $f(x)=\dfrac{2x^3+9x^2+3x-4}{x^3+2x^2-x-2}$

a. Si existe determine, la coordenada del agujero .

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se factoriza el numerador y denominador de la función para poder cancelar factores y encontrar las coordenadas del agujero.	$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{(x+1)(x+4)(2x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}}$
2.	El factor que se cancela es $(x+1)$,por lo que se despeja el valor "x".	$\mathbf{1+x=0}$ $\mathbf{x=-1}$
3.	Se sustituye el valor de "x" en la función factorizada para encontrar la coordenada "y" del agujero.	$\boldsymbol{f(-1)=\dfrac{(-1+4)(2(-1)-1)}{(-1+2)(-1-1)}}$ $\boldsymbol{=\dfrac{3(-3)}{1(-2)}=\dfrac{9}{2}=4.5}$

R.// ***Las coordenadas del agujero serán H= (-1,4.5)***

b. Encuentre los puntos de intersección en el eje x e intersección en el eje y.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para calcular la intersección con el eje "y" se sustituye el valor de $x = 0$ en la función y se obtiene las coordenadas (x,y).	$f(0) = \frac{(0+4)(2(0)-1)}{(0+2)(0-1)}$ $= \frac{4(-1)}{2(-1)} = 2$ $\therefore (x, y) = (0, 2)$
2.	Las intersecciones en el eje "x" se obtienen igualando el valor de la función a cero y despejando los valores para encontrar "x".	$0 = \frac{(x+4)(2x-1)}{(x+2)(x-1)}$ $\rightarrow (x+4)(2x-1) = 0$ $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$ $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\therefore (-4, 0)\ y\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

R.// ***Puntos de intersección en el eje "x" =*** $(-4, 0)\ y\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de intersección en el eje "y" = $(0, 2)$

c. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Las asíntotas verticales se obtendrán de los factores del denominador que no fueron canceladas en el inciso a. en el subinciso 1. $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)(2x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$	$(x+2)\ y\ (x-1)$ $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

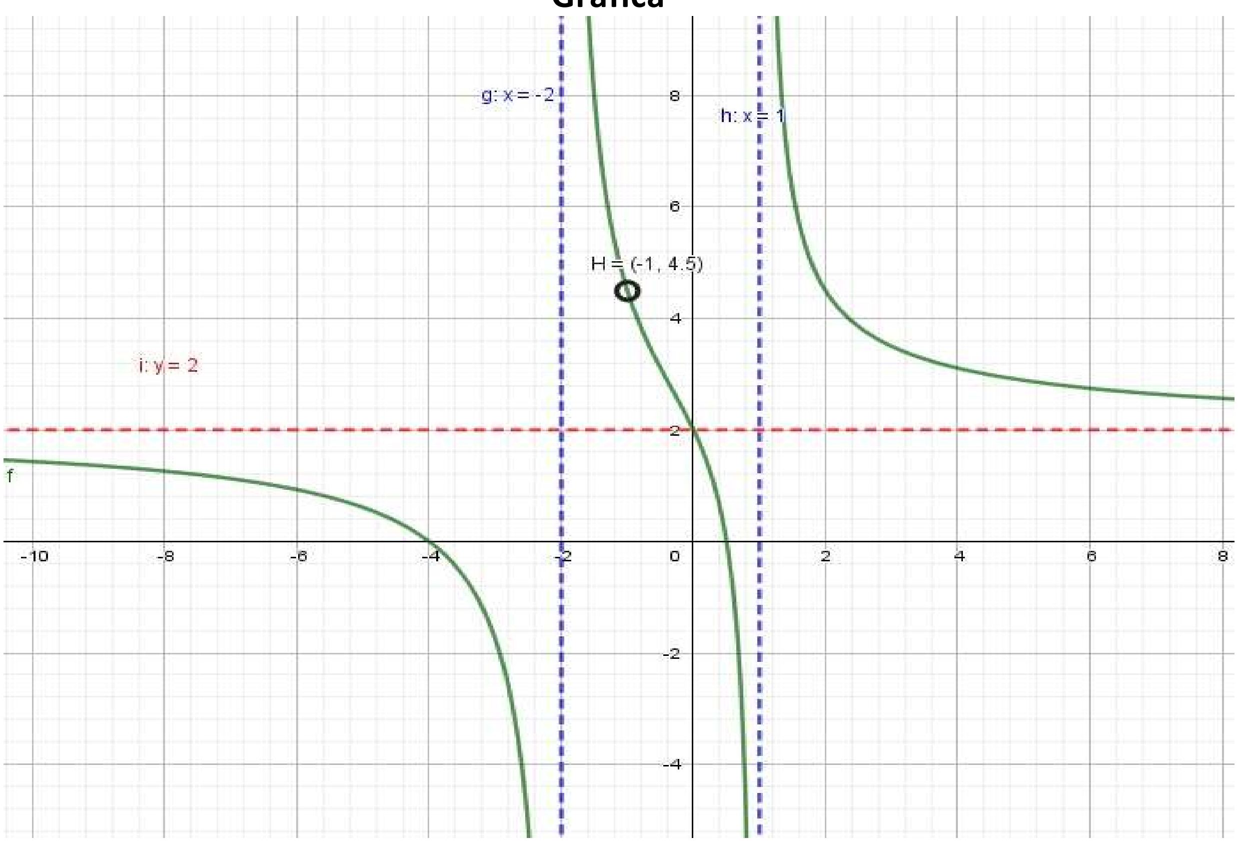
No.	Explicación	Operatoria
2.	Para las asíntotas horizontales es necesario comparar el grado del polinomio del numerador(GN) con el grado del polinomio del denominador(GD).	$GN = 3\,, GD = 3$ $GN = GD$
3.	Debido a que los grados son iguales se procede a dividir el coeficiente del grado mayor del polinomio del numerador entre el coeficiente del grado mayor del polinomio del denominador y el resultado de esa operación es el valor de la asíntota horizontal.	$f(x) = \dfrac{2x^3+9x^2+3x-4}{x^3+2x^2-x-2}$ $\dfrac{2}{1} = 2 \;\rightarrow y = 2$

R.// ***Asíntota horizontal*** $y = 2$

Asíntotas verticales $x = -2\,, x = 1$

d. Trace la gráfica, indicando la tendencia y el agujero.

Grafica



Tema 3: (20 puntos)

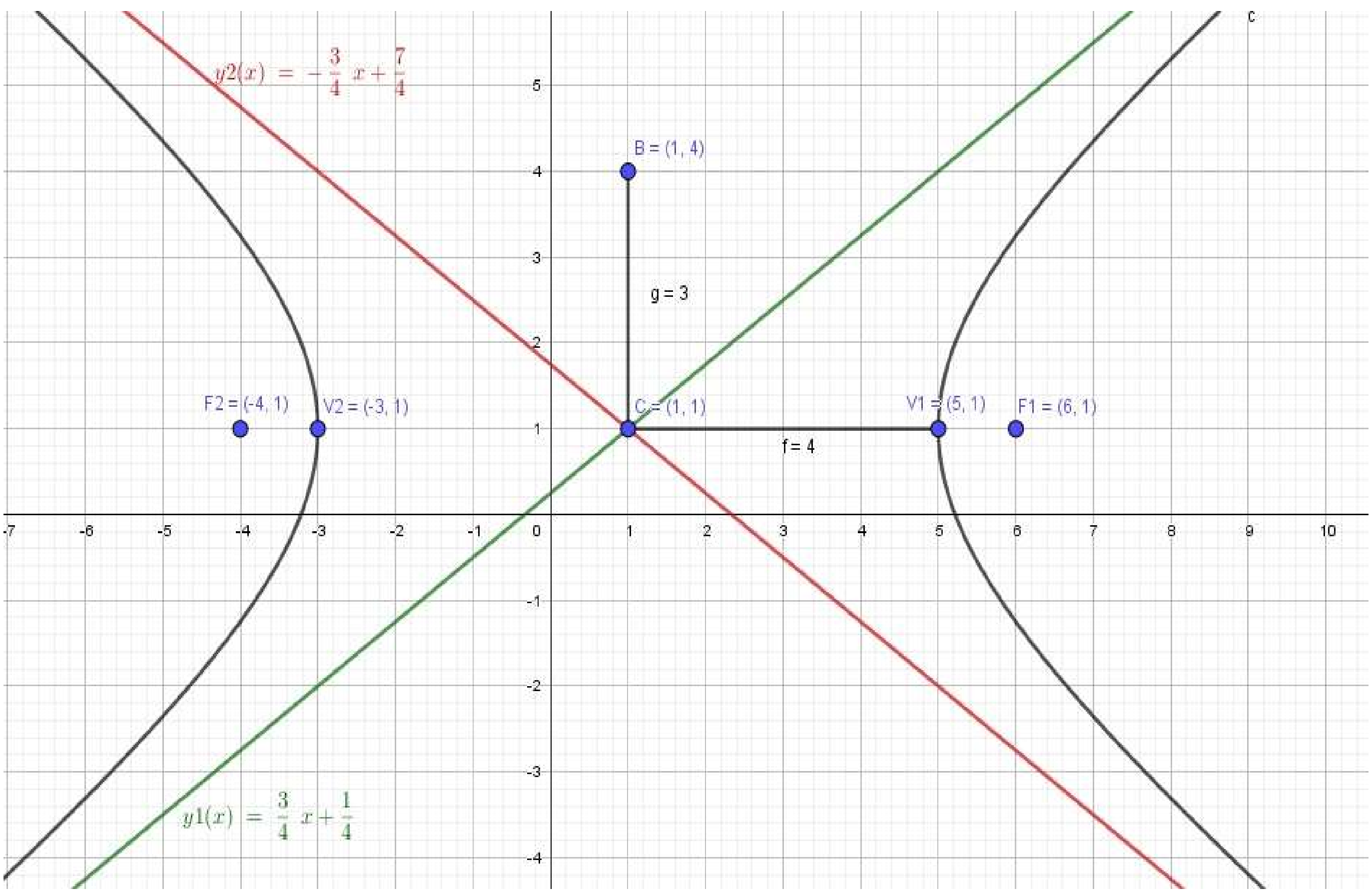
Encuentre el centro, los vértices, focos, asíntotas si las tiene y dibuje la representación gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se agrupan los términos semejantes, dejando los valores de X de forma consecutiva y los valores de Y.	$9x^2 - 18x - 16y^2 + 32y = 150$
2.	Se factorizan los términos que acompañan a los valores de X y los valores de Y.	$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 2y) = 150$
3.	Utilizamos la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ para realizar la completación de cuadrados	$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) = 150$
4.	Se procede a simplificar la completación de cuadrados.	$9((x-1)^2 - 1) - 16((y-1)^2 - 1) = 150$
5.	Se opera y simplifica para poder obtener la ecuación de una elipse o hipérbola.	$9(x-1)^2 - 16(y-1)^2 = 150 + 9 - 16$
6.	Se multiplica toda la expresión por $\frac{1}{144}$	$\frac{9(x-1)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} = \frac{144}{144}$
7.	Se realizan las simplificaciones para obtener la forma general de una hipérbola y poder obtener el centro, vértices, focos y asíntotas.	$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
8.	Obtenemos el centro(h,k), el valor de C, vértices(h±a,k), focos(h±C,k)	$centro = (1,1),\ \ c = \sqrt{16+9} = 5$

		$\boldsymbol{v_1 = (1+4,1) = (5,1)}$, $\boldsymbol{v_2 = (1-4,1) = (-3,1)}$ $\boldsymbol{f_1 = (1+5,1) = (6,1)}$ $\boldsymbol{f_2 = (1-5,1) = (-4,1)}$
9.	Obtenemos las asíntotas con la siguiente ecuación $\boldsymbol{y = \pm\frac{b}{a}(x-h)+k}$	$\boldsymbol{y_1 = \frac{3}{4}(x-1)+1 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 1}$ $\boldsymbol{y_1 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}$ $\boldsymbol{y_2 = -\frac{3}{4}(x-1)+1 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 1}$ $\boldsymbol{y_2 = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}}$

GRAFICA



R.// $\boldsymbol{Centro = (1,1), \quad v_1 = (5,1), \quad v_2 = (-3,1) \quad f_1 = (6,1) \quad f_2 = (-4,1)}$

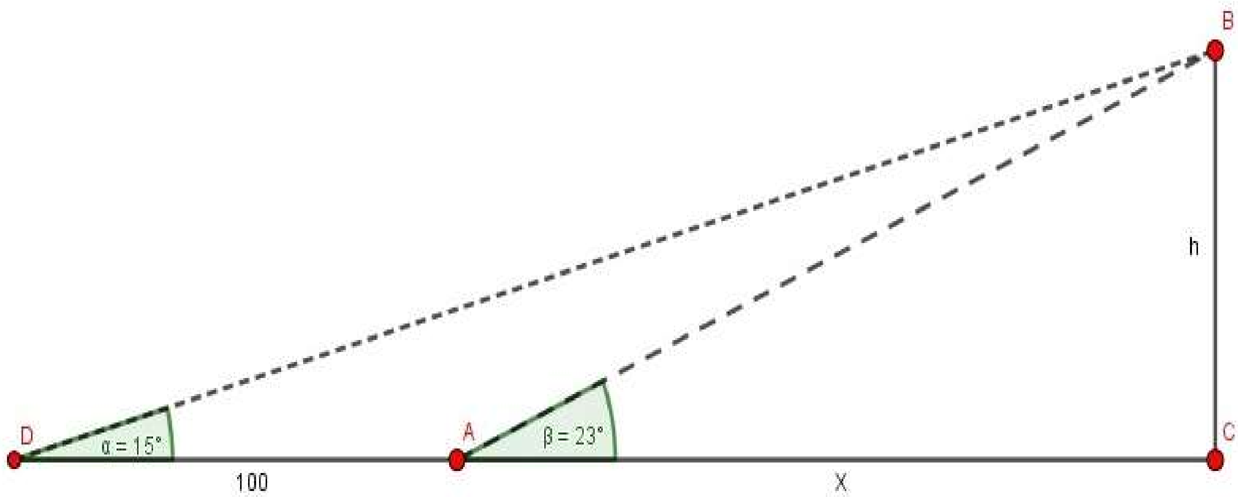
$$\boldsymbol{y_1 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \qquad y_2 = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}}$$

Tema 4: (20 puntos)

Desde un barco que navega hacia un faro, se observa que el ángulo de elevación a la parte más alta del faro es de 15^0. Cuando el barco se ha desplazado 100 metros hacia el faro el ángulo de elevación es de 23^0,

a. Calcular la altura del faro.

DIAGRAMA



No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizaremos la ecuación trigonométrica tangente para el triángulo ABC y para el triángulo DCB.	$\Delta ABC \rightarrow \tan 23° = \frac{h}{x}$ $\Delta DCB \rightarrow \tan 15° = \frac{h}{x+100}$
2.	Despejamos "x" del triángulo ABC.	$\tan 23° = \frac{h}{x}$ $\rightarrow x = \frac{h}{\tan 23°}$
3.	Se sustituye el valor de "x" del inciso anterior en la ecuación del triángulo DCB.	$\tan 15° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 23°} + 100}$

4.	Se procede a despejar para obtener el valor de "h" que es la altura del faro.	$\tan 15°\left(\frac{h}{\tan 23°}+100\right)=h$ $\frac{h\tan 15°}{\tan 23°}+\tan 15°\,(100)=h$ $h-\frac{h\tan 15°}{\tan 23°}=\tan 15°\,(100)$ $h\left(1-\frac{\tan 15°}{\tan 23°}\right)=\tan 15°\,(100)$ $h(0.368)=26.79$ $h=\frac{26.79}{0.368}\cong 72.66m$

R.// ***La altura del faro es de*** $\boldsymbol{72.7\ metros}$

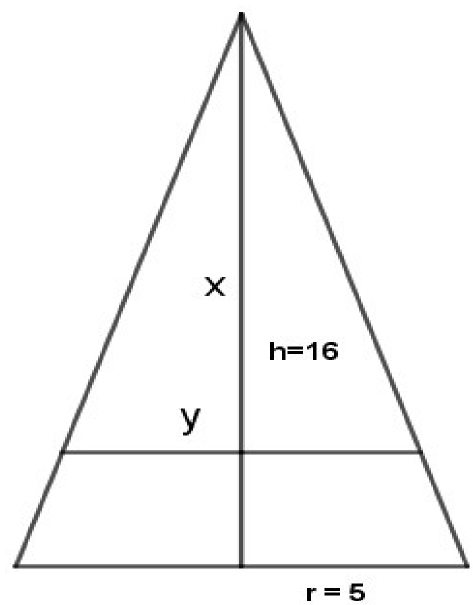
b. Calcule la distancia a la que se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda observación.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para calcular la distancia a la que se encuentra el barco del faro, se utilizara el valor de "h" obtenido del inciso a. utilizando el valor de "h" en la ecuación obtenida del inciso a. subinciso 2. $x=\frac{h}{\tan 23°}$	$x=\frac{h}{\tan 23°}$ $=\frac{72.663}{0.42}\cong 171.18m$

R.// ***La distancia a la que se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda observación es de*** $\boldsymbol{171\ metros}$

Tema 5: (20 puntos)

Por cual punto de la altura de un cono circular recto de altura 16 cm y radio 5cm, debe pasar un plano paralelo a la base, de tal forma que limite un cono cuyo volumen se la mitad del cono original.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se calcula el volumen total del cono $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$	$v_t = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi (5)^2 16}{3}$ $v_t = \frac{400\pi}{3} cm^3$
2.	Definimos el volumen del nuevo cono como $v_1 = \frac{v_t}{2}$	$v_1 = \frac{\frac{400\pi}{3}}{2}$ $v_1 = \frac{200\pi}{3}\ cm^3$
3.	Procedemos a utilizar semejanza de triángulos para definir una ecuación para la variable “y” en términos de “x”.	
4.	Se despeja la variable “y” en términos de “x” de la ecuación del inciso anterior.	$\frac{x}{h} = \frac{y}{r}$ $\frac{x}{16} = \frac{y}{5}$ $y = \frac{5}{16}x$

5.	Se sustituye el valor de "y" en función de "x" para la siguiente ecuación $v_1 = \frac{\pi y^2 x}{3}$	$v_1 = \frac{\pi\left(\frac{5}{16}x\right)^2 x}{3} = \frac{\pi\frac{25}{256}x^3}{3}$
6.	Se sustituye el valor de $\boldsymbol{v_1}$ obtenido del inciso 2 en la ecuación de $\boldsymbol{v_1}$ obtenida del inciso 5.	$\frac{200\pi}{3} = \frac{\pi\frac{25}{256}x^3}{3}$
7.	Se procede a realizar la operatoria necesaria para despejar el valor de "x" en la ecuación del inciso anterior.	$\frac{\pi\frac{25}{256}x^3}{3} = \frac{200\pi}{3}$ $\frac{25}{256}x^3 = 200$ $x^3 = 200\left(\frac{256}{25}\right)$ $x = \sqrt[3]{2048} = 12.69 \cong 12.7cm$

R.// El punto por el cual debe pasar un plano paralelo a la base, es de 12.7cm visto desde la punta hacia abajo o 3.3cm visto desde la base hacia arriba.