UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-4-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**Noviembre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**B’alam Luis Gregorio Lol Alvarez**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario de León**

Universidad de San Carlos Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Jornada Matutina
Matemática Básica 1
Examen Final

Guatemala, Noviembre de 2017

Temario A

Tema 1: (30 puntos)

a. Resuelva la ecuación:

$$x^{-4/3} - x^{-2/3} - 6 = 0$$

b. Resuelva la ecuación logarítmica:

$$\log_x 100 + \log_x 25 = 2$$

c. Resuelva la desigualdad

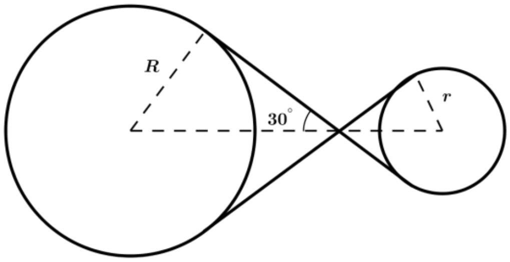
$$x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Tema 2: (20 puntos)

Daniel y Jorge hacen una competencia para llegar de su casa a la escuela, la cual se encuentra a una distancia de 2 kilómetros de esta. Si Daniel viaja en bicicleta a un ritmo que es 1/5 km/h más rápido de lo que Jorge lo hace a pie, ¿Cuánto tiempo después de Jorge debe salir Daniel para que ambos lleguen a la escuela en 45 minutos?

Tema 3: (20 puntos)

Una correa de transmisión pasa a través de dos ruedas de radios $R = 40$ cm y $r = 15$ cm, como se muestra en la figura. Determine la longitud de la correa.



Tema 4: (15 puntos)

Calcule las asíntotas verticales, asíntotas horizontales, puntos de intercepción con los ejes coordenados y dibuje la gráfica de la función racional.

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$$

Tema 5: (15 puntos)

Las asíntotas de una hipérbola trasladada son: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ & $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$. Uno de sus vértices está en el punto $(5,-1)$. Encuentre la ecuación general de la hipérbola y dibuje su representación gráfica.

Universidad de San Carlos Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Jornada Matutina
Matemática Básica 1
Examen Final

Guatemala, Noviembre de 2017

SOLUCIÓN

Tema 1: (30 puntos)

a. Resuelva la ecuación:

$$x^{-4/3} - x^{-2/3} - 6 = 0$$

b. Resuelva la ecuación logarítmica:

$$\log_x 100 + \log_x 25 = 2$$

c. Resuelva la desigualdad

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1	A) Dada la forma de la ecuación se facilitará la resolución si se hace la siguiente sustitución	$u = x^{-2/3}$ $u^2 = x^{-4/3}$
2	Se sustituye y se encuentra la siguiente ecuación cuadrática	$u^2 - u - 6 = 0$
3	Se resuelve la ecuación cuadrática por cualquier método, en este caso se utilizará factorización	$(u-3)(u+2) = 0$ $u = 3 \;\rightarrow\; x^{-2/3} = 3$ $u = -2 \rightarrow\; x^{-\frac{2}{3}} = -2$
4	Se toma la primera solución de la ecuación cuadrática, se sustituye nuevamente y se eleva ambos lados a la potencia -3 Se despeja aplicando raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad	$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} = (3)^{-3}$ *Usando leyes de exponentes …* $x^2 = \frac{1}{3^3}$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3^3}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$ *Racionalizando el resultado …* $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}$
5	Se toma la segunda solución de la ecuación cuadrática y se eleva ambos lados a la potencia -3 Se despeja aplicando raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad	$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} = (-2)^{-3}$ *Usando leyes de exponentes …* $x^2 = \frac{-1}{2^3}$ $x = \pm\sqrt{\frac{-1}{8}}$ *No se obtienen soluciones reales*

6	Se comprueban los dos valores obtenidos para saber que valores si son soluciones	$\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{4}{3}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} - 6 = 0$ $9 - 3 - 6 = 0$ $0 = 0,\ \ si\ cumple$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{4}{3}} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} - 6 \neq 0$ $NO\ cumple$ $Solución\text{:}\ \ x = \frac{\sqrt{3}}{9}$
7	B) Se aplica la propiedad para suma de logaritmos de misma base	$Usando\ \ldots$ $\log_a b + \log_a c\ = \log_a bc$ $\log_x 100 + \log_x 25\ = 2$ $\log_x(100 * 25) = 2$ $\log_x(2500) = 2$
8	Se utiliza la conversión de logaritmo a función exponencial Dado que no hay logaritmos reales con base negativa se toma como única solución la raíz positiva	$Usando\ \ldots$ $\log_a b = \mathrm{c}\ \rightarrow \mathrm{c}^b = \mathrm{a}$ $\log_x(2500) = \ 2\ \ \rightarrow\ \ \ \mathrm{x}^2 = \ 2500$ $x = \pm\sqrt{2500}$ $x = \pm 50$ $Solución\text{:}\ \ \ x = \ 50$
9	C) Dado que es una desigualdad no lineal se deben analizar los valores críticos del polinomio, estos se obtienen al igualar el polinomio a cero y encontrar la soluciones, en este caso se utilizará factorización	$x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq\ \ 0$ $Para\ obtener\ los\ \ valores\ criticos\ \ldots$ $x^3 - x^2 - 4x + 4 = \ 0$ $factorizando\ \ldots$ $x^2(x-1) - 4(x-1) = \ 0$ $(x-1)(x^2-4) = 0$ $x = 1$ $x = \ \pm 2$

<table>
<tr><td>10</td><td>Con la ayuda de los valores críticos se divide el conjunto de números reales en intervalos de la siguiente forma</td><td>$(-\infty,-2)\ ,(-2,1)\ ,(1,2)\ ,(2,\infty)$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Se elige un numero de prueba dentro de cada intervalo y luego se evalúa en el polinomio para determinar si es mayor o igual a cero, según la desigualdad, este procedimiento se muestra en la siguiente tabla

Dado que los extremos de cada intervalo son raíces del polinomio se deben incluir en el intervalo solución</td><td>
<table>
<tr><th>Intervalo</th><th>Numero de prueba (a)</th><th>P(a) = a^3-a^2-4a+4</th><th>≥ 0</th></tr>
<tr><td>$(-\infty,-2)$</td><td>-3</td><td>-20</td><td>$No\ cumple$</td></tr>
<tr><td>$(-2,1)$</td><td>0</td><td>$+4$</td><td>$Si\ cumple$</td></tr>
<tr><td>$(1,2)$</td><td>1.5</td><td>$-7/8$</td><td>$No\ cumple$</td></tr>
<tr><td>$(2,\infty)$</td><td>3</td><td>10</td><td>$Si\ cumple$</td></tr>
</table>
$Solución\!:\ \ [-2,1]\ U\ [2,\infty]$</td></tr>
</table>

Tema 2: (20 puntos)

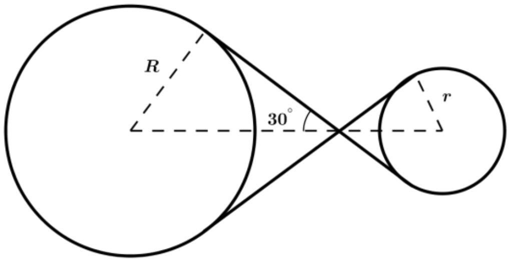
Daniel y Jorge hacen una competencia para llegar de su casa a la escuela, la cual se encuentra a una distancia de 2 kilómetros de esta. Si Daniel viaja en bicicleta a un ritmo que es 1/5 km/h más rápido de lo que Jorge lo hace a pie, ¿Cuánto tiempo después de Jorge debe salir Daniel para que ambos lleguen a la escuela en 45 minutos?

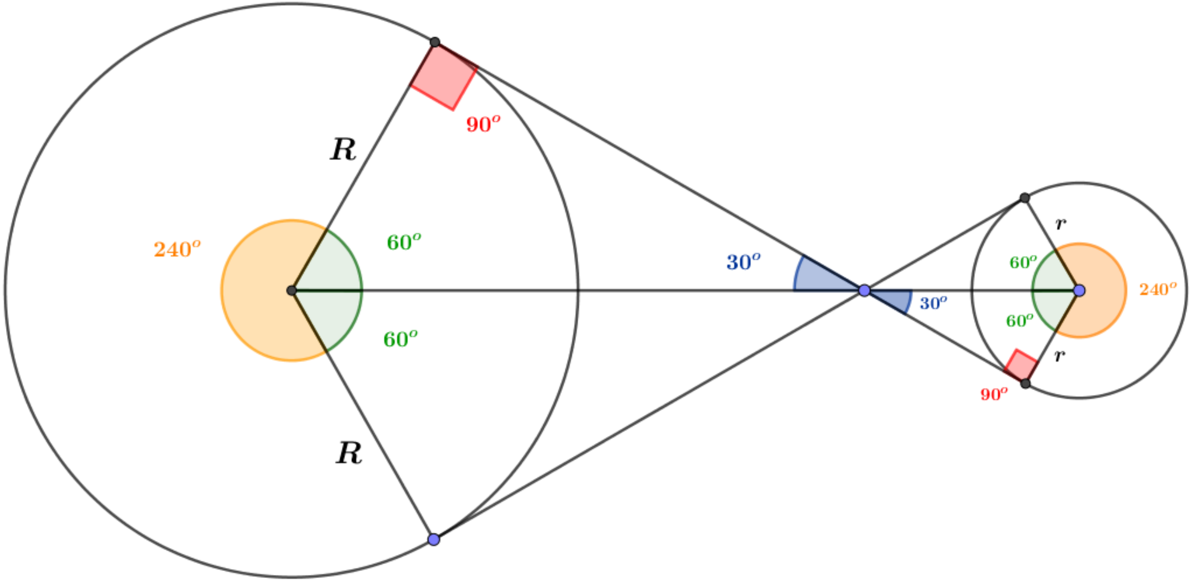
No.	Explicación	Operatoria
1	Dado que el viaje de Jorge es constante y no depende de lo que haga Daniel, se puede determinar su velocidad sabiendo el tiempo que le tomará llegar a la escuela y la distancia a la que está la escuela Se debe recordar que las dimensionales de tiempo, distancia y velocidad deben ser consistentes, debido a eso todo se trabajará en horas, kilómetros y km/h, respectivamente	$V_j\!: Velocidad\ de\ Jorge$ $V_j=\frac{X}{t}$ $45\ \text{min}=0.75\ horas$ $V_j=\frac{2km}{0.75h}=\frac{8}{3}\ km/h$
2	Ahora que ya se sabe la velocidad de Jorge también se puede determinar la velocidad de Daniel, ya que la velocidad de Daniel es 1/5 km/h mas rápido que la de Jorge	$V_d\!: Velocidad\ de\ Daniel$ $V_d=V_j+\frac{1}{5}$ $V_D=\frac{8}{3}+\frac{1}{5}=\frac{43}{15}\ \text{km/h}$

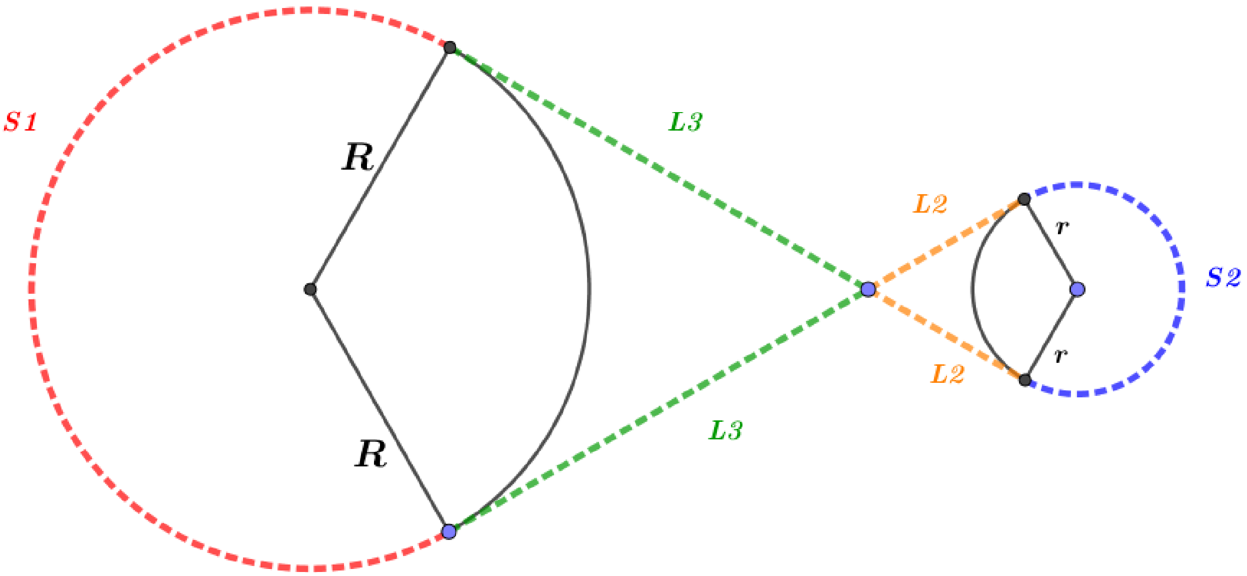
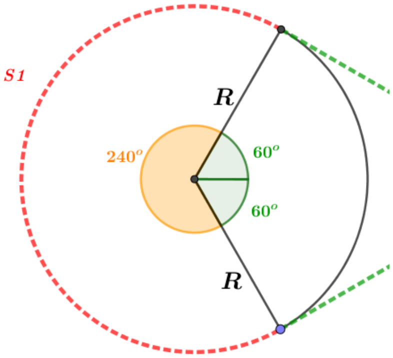
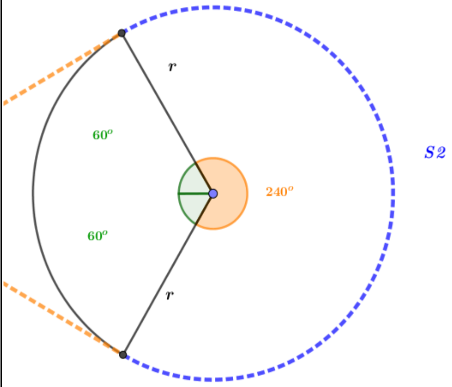
3	Ya que se conoce la velocidad de Daniel y además el ejercicio pide que ambos recorran una distancia igual de 2km, podemos saber el tiempo que le toma a Daniel recorrer esa distancia	$t_D = \frac{Distancia}{V_D}$ $t_D = \frac{2km}{\frac{43}{15}km/h} = \frac{30}{43}\,h \approx 0.6976\,h$
4	Ahora se sabe que a Daniel solo le tomaría 0.6976horas recorrer los dos kilómetros pero ya que ambos estudiantes deben llegar en 45min = 0.75h, Daniel puede esperar un poco y luego avanzar de tal forma que ambos lleguen en 45min	$t = 0.75h - t_D$ $t = 0.75 - 0.6976 = 0.05\ horas$ $0.05 horas = 3min$ *Daniel debe darle a Jorge 3min de ventaja para llegar ambos en 45min*

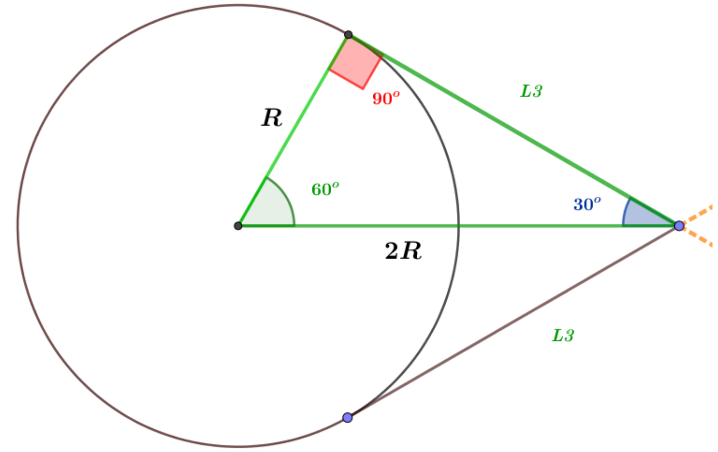
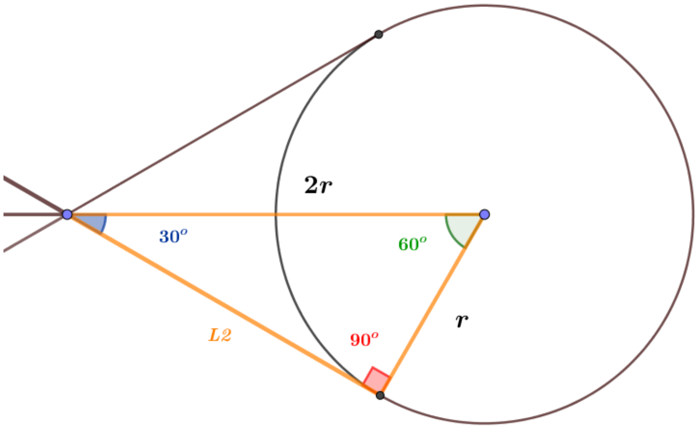
Tema 3: (20 puntos)

Una correa de transmisión pasa a través de dos ruedas de radios $R = 40$ cm y $r = 15$ cm, como se muestra en la figura. Determine la longitud de la correa.



No	Explicación	Operatoria
1	se hace un esquema anotando todos los ángulos que se forman entre la correa y los dos círculos, los angulos de 90^o se forman debido a que las poleas son tangentes a los círculos, además se indica en el esquema que se forman 2 triangulos rectangulos entre los radios de los círculos y la correa:  	

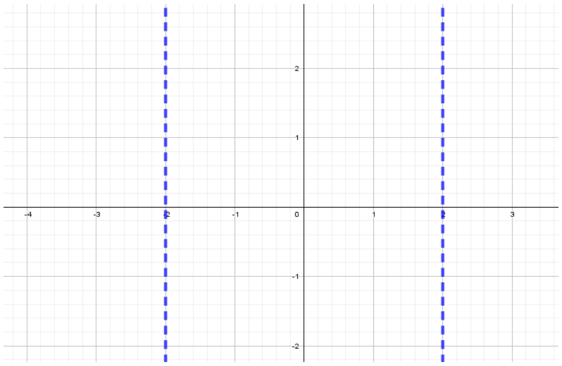
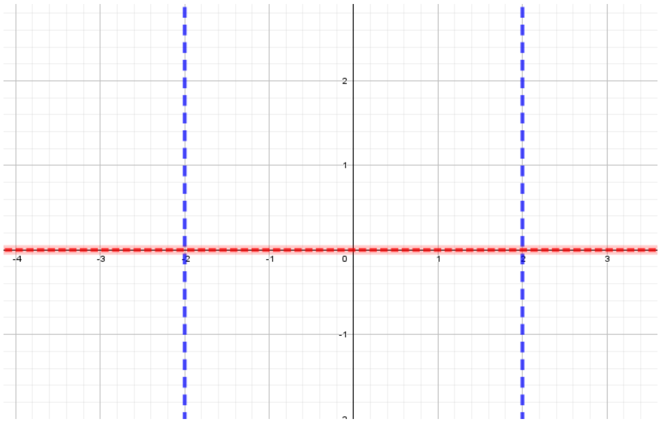
<table>
<tr>
<td>2</td>
<td colspan="2">Para determinar la longitud de la correa se debe notar que esta está formada por dos arcos y 4 segmentos de recta como se muestra en la siguiente figura
 </td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>Se determina la longitud del arco $S1$, sabiendo que el angulo que forma dicho arco es 240^o
Se utilizará la ecuación de longitud de arco: $S = r\theta$, donde r es el radio del circulo y θ es el ángulo en radianes
Por comodidad se dejará el resultado en términos de R</td>
<td>
$S1 = R * \theta$
$\theta = 240^o$
$En\ radianes\ ...$
$240^o \text{ x } \frac{\pi\, rad}{180^o} = \frac{4\pi}{3}$
$\theta = \frac{4\pi}{3} rad$
$\boldsymbol{S1 = \frac{4\pi}{3}\ R}$</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Para determinar la longitud de arco $S2$ se hace el mismo procedimiento que para S1, con la diferencia de que el radio cambiará, tambien por comodidad se dejará el resultado en términos de r</td>
<td>
$S2 = r * \theta$
$\theta = 240^o$
$En\ radianes\ ...$
$240^o \text{ x } \frac{\pi\, rad}{180^o} = \frac{4\pi}{3}$
$\theta = \frac{4\pi}{3} rad$
$\boldsymbol{S2 = \frac{4\pi}{3}\ r}$</td>
</tr>
</table>

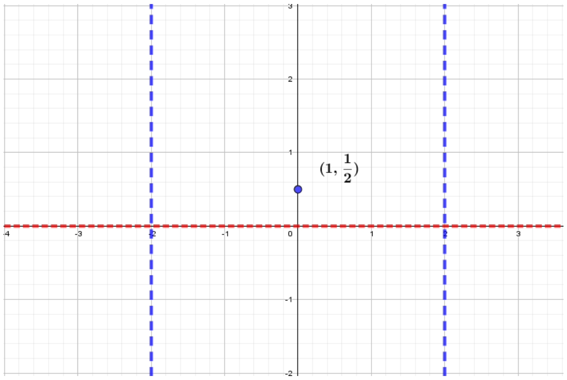
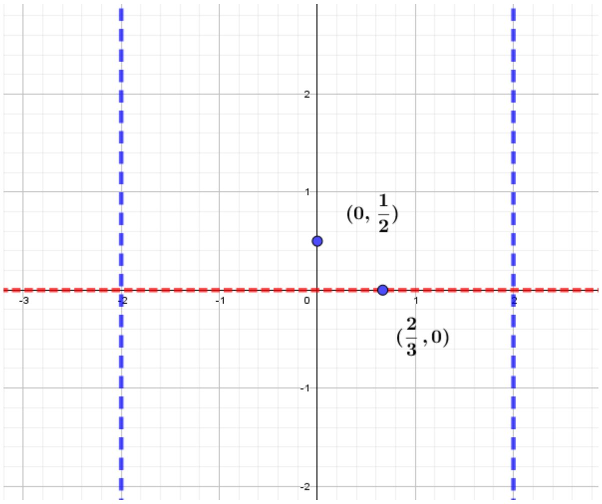
5	Ahora se analizarán los segmentos de recta $L1$ que se forman a partir de triángulos. Primero se debe observar que estos triángulos tienen ángulos $30^o, 60^o y\ 90^o$, por lo tanto, se trata de triángulos que son la mitad de un triángulo equilátero, cuya base es R y por lo tanto el lado mide $2R$ como se muestra Según la figura la longitud $L1$ es la altura de este triangulo, recordando que la altura de este triangulo se relaciona con el lado según la ecuación: $$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$ Se puede determinar la longitud $L1$ en términos del radio R Se hace el mismo análisis para el segmento de recta L2	 *Por triangulos equilateros …* $L3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (2R)$ $\boldsymbol{L3 = \sqrt{3}\ R}$  *Por triangulos equilateros …* $L2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (2r)$ $\boldsymbol{L2 = \sqrt{3}\ r}$
6	Finalmente se tiene que la longitud de la cuerda, L_t, es la suma de los dos arcos y los 4 segmentos	$L_t = S1 + S2 + L2 + L2 + L3 + L3$ $L_t = S1 + S2 + 2\ L2 + 2\ L3$ $L_t = \frac{4\pi}{3}\ R + \frac{4\pi}{3}\ r + 2\ (\sqrt{3}\ R) + 2\ (\sqrt{3}\ r)$ $L_t = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) R + \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \mathrm{r}$ $Sustituyendo\ R = 40cm\ \ y\ \ \ r = 15cm\ …$ $L_t \approx 420.909\ cm$

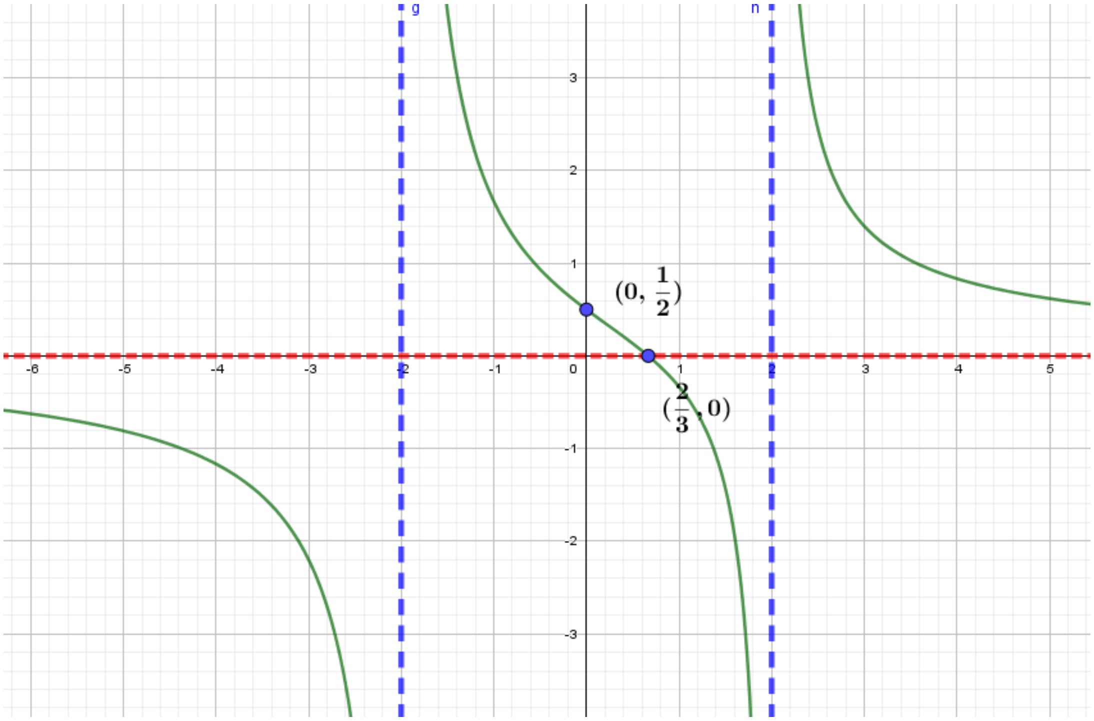
Tema 4: (15 puntos)

Calcule las asíntotas verticales, asíntotas horizontales, puntos de intercepción con los ejes coordenados y dibuje la gráfica de la función racional.

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para determinar las asintotas verticales se iguala el denominador a cero, los valores encontrados serán las ecuaciones de las rectas verticales Se grafican ambas asíntotas verticales	$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$ $Igualando\ denominador\ a\ cero\ \dots$ $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2$ $Graficando\ \dots$ 
2	Para encontrar las asíntotas verticales se debe notar que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, por lo tanto la asíntota horizontal es $y = 0$	$Grado\ del\ numerdor = 1$ $Grado\ del\ denominador = 2$ $Si\ Grado\ del\ denominador > Grado\ del\ numerador$ $Asintota\ Horizontal: y = 0$ $Graficando\ \dots$ 

3	Para determinar las intersecciones con el eje "y" se evalua la función en $x = 0$	$f(0) = \frac{3(0)-2}{(0)^2-4} = \frac{1}{2}$ $Punto\ de\ Intersección$ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $Graficando\ \ldots$ 
4	Para determinar la intersección con el eje "x", se iguala la función a cero y se despeja "x"	$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4} = 0$ $3x - 2 = 0$ $x = \frac{2}{3}$ $Punto\ de\ Intersección$ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ $Graficando\ \ldots$ 

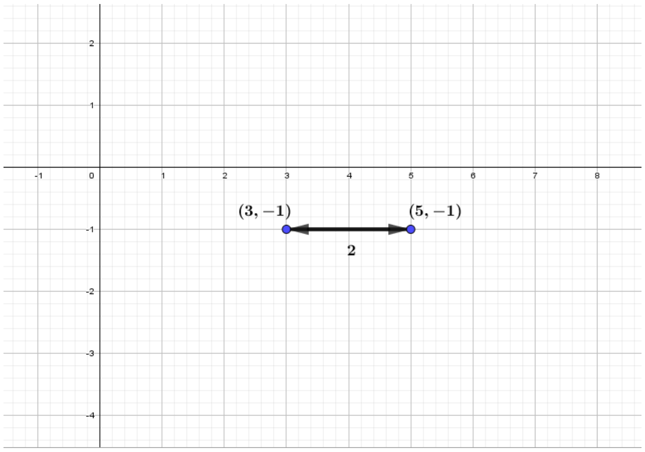
<table>
<tr>
<td>5</td>
<td>Finalmente para poder graficar se analiza el comportamiento de la función cuando toma valores cercanos a las asíntotas, esto se hace evaluando en la función valores cercanos a las asíntotas verticales por ejemplo para la asintota $x = 2$ se evaluarán los valores $x = 2.001$ y $x = 1.998$
Como se muestra en la tabla</td>
<td><i>Analizando el comportamiento cerca de las asintotas</i>
<table>
<tr><th>Asíntota</th><th>Numero a evaluar, a</th><th>Valor de la función, $f(a)$</th><th>Comportamiento</th></tr>
<tr><td>$x = -2$</td><td>-2.001</td><td>-2000</td><td>La función tiende a $-\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>-1.998</td><td>999.75</td><td>La función tiende a $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x = 2$</td><td>1.998</td><td>-499.5</td><td>La función tiende a $-\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>2.001</td><td>1000</td><td>La función tiende a $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td colspan="2">Con la información de la tabla anterior ya se puede terminar de graficar la función:


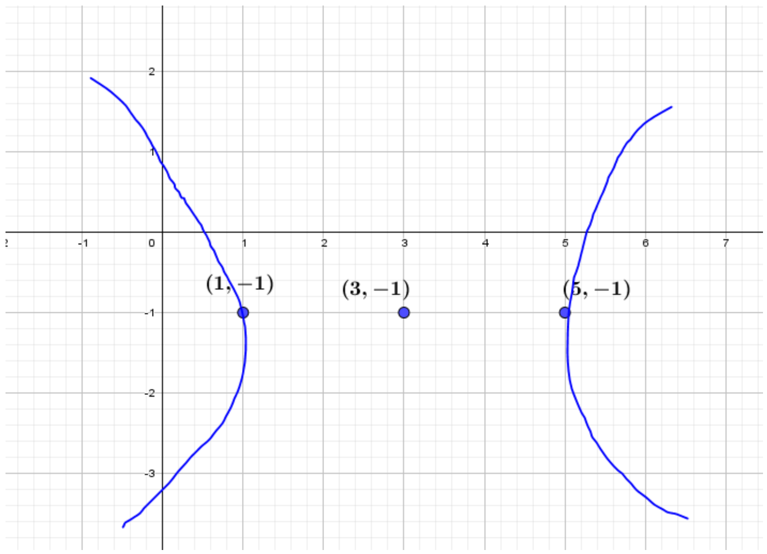
</td>
</tr>
</table>

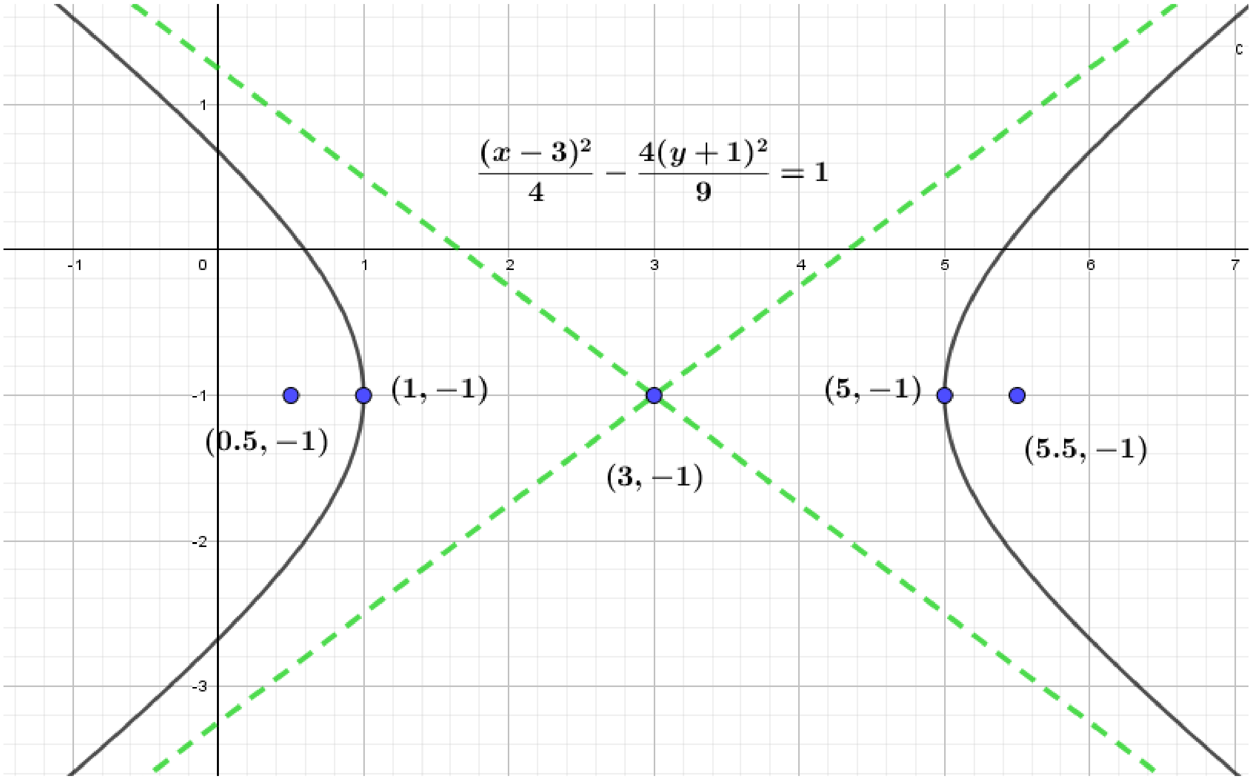
Tema 5: (15 puntos)

Las asíntotas de una hipérbola trasladada son: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ & $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$. Uno de sus vértices está en el punto $(5, -1)$. Encuentre la ecuación general de la hipérbola y dibuje su representación gráfica.

No.	Explicación	Operatoria
1	Dado que se tienen las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas se pueden determinar las coordenadas	*Asintotas*: $y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{4}$

	del centro de la hipérbola igualando las ecuaciones de las asíntotas Para determinar la otra coordenada del centro de la hipérbola se sustituye el valor de x encontrado en cualquiera de las ecuaciones de las asintotas	$y=\frac{3}{4}x-\frac{13}{4}$ $Igualando\ las\ rectas\ \ldots$ $\frac{-3}{4}x+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}x-\frac{13}{4}$ $\frac{-3}{4}x-\frac{3}{4}x=-\frac{5}{4}-\frac{13}{4}$ $-3x-3x=-5-13$ $-6x=-18$ $x=3$ $\mathrm{y}=\frac{3}{4}(3)-\frac{13}{4}=-1$ $Centro\ de\ la\ hiperbola:$ $(h,k)=(3,-1)$
2	Se ponen en una misma grafica el punto del centro de la hipérbola y el punto de uno de los vértices que proporciona el enunciado Dado que la distancia entre el centro y cualquiera de los vertices esta dada por la constante a, según la grafica se observa que $a=2$ Entonces el segundo vértice tendrá las coordenadas: (1,-1)	

3	Se esboza la hipérbola con la información que proporciona el vértice y el centro de la hipérbola, ya que las coordenadas "y" del centro y el vértice son iguales se determina que se trata de una hipérbola horizontal, cuyas asíntotas deben tener pendientes de la forma que se muestra	 $Asintotas\ con\ pendiente\ de\ la\ forma:$ $m = \pm\frac{b}{a}$
4	Dado que se tienen las ecuaciones de las asíntotas y además se conoce el valor de a , se puede despejar para encontrar b.	$Pendientes\ de\ asintotas$ $m = \pm\frac{3}{4}$ $Entonces\ ...$ $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{3}{4}$ $Dado\ que\ a = 2$ $\frac{b}{2} = \frac{3}{4}$ $b = \frac{3}{2}$ $Para\ hallar$ c $en\ una\ hiperbola:$ $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$ $Focos: (h \pm c, k)$ $Focos: (3 + 5/2, -1)\ \ y\ \left(3 - \frac{5}{2}, -1\right)$ $Focos: \left(\frac{11}{2}, -1\right)\ y\ \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

<table>
<tr><td>5</td><td>Las ecuación estándar de la hipérbola horizontal es de la siguiente forma, sustituyendo los valores de (h,k), a y b encontrados se obtiene la ecuación de la hiperbola</td><td>$Hiperbola\ Horizontal$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$(h,k)=(3,-1)$
$a=2$
$b=\frac{3}{2}$
$Sustituyendo\ \ldots$
$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{4(y+1)^2}{9}=1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">La grafica de la ecuación queda de la siguiente forma

 </td></tr>
</table>