UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-3-M-1-00-2017

CURSO	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE	**Primer Semestre**
CÓDIGO DEL CURSO	**101**
TIPO DE EXAMEN	**Tercer Parcial**
FECHA DE EXAMEN	**27 de abril de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN	**Freddy Lorenti**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN	**Freddy Lorenti**
REVISÓ EL EXAMEN	**Inga. Ericka Cano**
COORDINADOR	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Tercer examen parcial

Temario A

Tema 1(20 puntos)

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros que tiene como raíces $x = 3$ de multiplicidad 2, $x = -2$, $x = 5$ y $x = 1 - 2i$.
a. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.
b. Determine el coeficiente principal a_n si la gráfica del polinomio pasa por el punto $(2, -15)$.
c. Determine el término constante a_0.
d. Dibuje la representación gráfica del polinomio.

Tema 2(20 puntos)

Dada la función racional $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$.
a. Determine las intersecciones con los ejes de coordenadas.
b. Obtenga las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica.
c. Dibuje la representación gráfica.

Tema 3(20 puntos)

Resuelva las ecuaciones:

a. $log_{25}(2x-1)^{-2} + log_5(4x^2 - 4x + 1) = 0$

b. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x \left(\dfrac{3}{10}\right)^{x-1} = \dfrac{40}{3}$

Tema 4(20 puntos)

La vida media del $Paladio^{100}$ es de 4 días. Después de 20 días una muestra ha reducido su masa hasta 0.375 gramos.
a. ¿Cuál fue la masa inicial de la muestra?
b. Encuentre un modelo que exprese la cantidad de masa restante M después de t días.
c. ¿Cuál es la masa restante después de 3 dias?
d. ¿Después de cuántos días habrán únicamente 0.15 gramos?

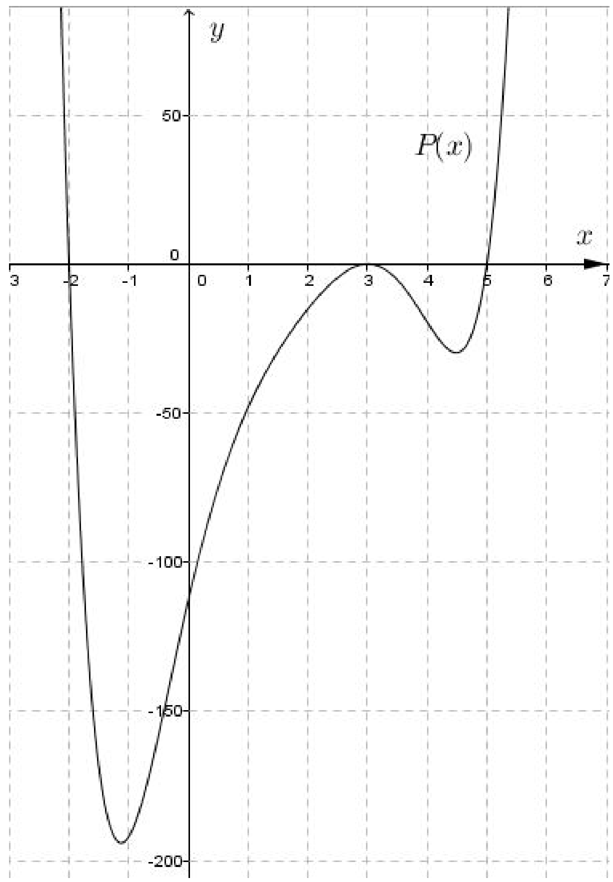
Tema 5(20 puntos)

Dada la función trigonométrica: $f(x) = -3sen\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$
a. Determine la amplitud, el período y el desplazamiento de fase.
b. Dibuje su representación gráfica mostrando un ciclo completo.

Tema 1(20 puntos)

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros que tiene como raíces $x = 3$ de multiplicidad 2, $x = -2$, $x = 5$ y $x = 1 - 2i$.
a. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.
b. Determine el coeficiente principal a_n si la gráfica del polinomio pasa por el punto $(2, -15)$.
c. Determine el término constante a_0.
d. Dibuje la representación gráfica del polinomio.

No.	Explicación	Operatoria
1	Las raíces se representan como factores, de la siguiente forma $(x-a)^n$, donde a es la raíz y n es la multiplicidad.	$(x-3)^2$ $(x+2)$ $(x-5)$
2	En el caso de la raíz compleja, debe expresarse como el factor cuadrático de donde nace la raíz. Las raíces complejas vienen en pares conjugados, por lo que deben expresarse dos factores de raíces complejas y después simplificarse, para obtener la expresión correcta.	$[x-(1-2i)]\,[x-(1+2i)] = (x-1+2i)(x-1-2i)$ $(x-1)^2 + 2^2 = x^2 - 2x + 5$
3	Con todos los factores expresados correctamente, se expresa el polinomio como un producto, agregando el coeficiente principal a_n.	$P(x) = a_n(x-3)^2(x+2)(x-5)(x^2-2x+5)$
4	El coeficiente principal a_n se determina con la sustitución del punto $(2, -15)$ en el polinomio y despejando a_n.	$-15 = a_n(2-3)^2(2+2)(2-5)(2^2-2(2)+5)$ $a_n = \frac{1}{4}$
5	El polinomio factorizado se presenta así.	$P(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2(x+2)(x-5)(x^2-2x+5)$
6	Para determinar el coeficiente a_0 se realiza la sustitución $P(0) = a_0$.	$P(0) = \frac{1}{4}(0-3)^2(0+2)(0-5)(0^2-2(0)+5) = a_0$ $a_0 = -\frac{225}{2}$

No.	Explicación	Operatoria
7	Representación gráfica del polinomio.	

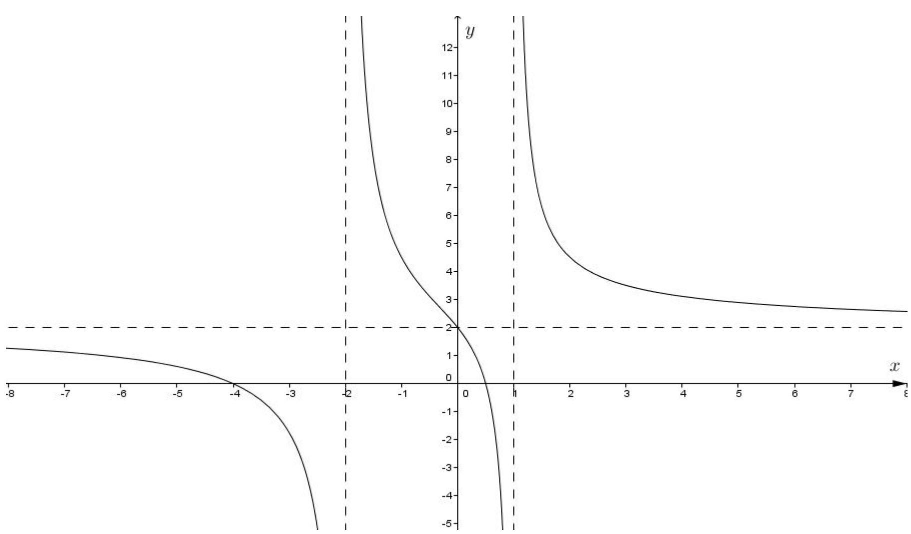
Tema 2(20 puntos)

Dada la función racional $f(x) = \dfrac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$.

a. Determine las intersecciones con los ejes de coordenadas.
b. Obtenga las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica.
c. Dibuje la representación gráfica.

No.	Explicación	Operatoria
1	Para conocer los parámetros de la función, se factorizan el numerador y denominador.	$f(x) = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x+2)(x-1)}$
2	Las intersecciones con el eje x se determinan con los ceros del numerador.	$2x-1=0 \qquad x+4=0$ $x=\dfrac{1}{2} \qquad x=-4$
3	Para encontrar la intersección con el eje y, la variable x debe igualarse a cero.	$y = \dfrac{(2(0)-1)((0)+4)}{((0)+2)((0)-1)} = 2$ $(0,2)$
4	Las asíntotas verticales se encuentran calculando los ceros del denominador.	$x+2=0 \qquad x-1=0$ $x=-2 \qquad x=1$
5	Como el grado del numerador es igual al del denominador $n=m$, la asintota horizontal se determina dividiendo los coeficientes principales de cada polinomio.	$y = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2}{1} = 2$

Por último, se realiza la representación gráfica de la función.



Tema 3(20 puntos)

Resuelva las ecuaciones:
a. $\log_{25}(2x-1)^{-2} + \log_5(4x^2-4x+1) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para trabajar la ecuación, debe realizarse un cambio de base de $\log_{25}$ a $\log_5$ en el término $\log_{25}(2x-1)^{-2}$.	$\log_{25}(2x-1)^{-2} = \dfrac{\log_5(2x-1)^{-2}}{\log_5 25}$ $\log_{25}(2x-1)^{-2} = \dfrac{1}{2}\log_5(2x-1)^{-2}$
2	Sustituyendo en la ecuación y transformando el término 1/2 a exponente.	$\log_5(2x-1)^{-1} + \log_5(4x^2-4x+1) = 0$
3	Aplicando leyes de logaritmos, la suma de logaritmos de misma base, puede expresarse como la multiplicación de los argumentos.	$\log_5\left[(2x-1)^{-1}(4x^2-4x+1)\right] = 0$
4	Eliminando el $\log_5$.	$5^0 = \dfrac{4x^2-4x+1}{2x-1}$
5	Trabajando la ecuación resultante para obtener una cuadrática y factorizarla.	$2x-1 = 4x^2-4x+1$ $2x^2-3x+1=0$ $(2x-1)(x-1)=0$
6	Determinando los ceros que dan solución a la ecuación.	$2x-1=0 \qquad x-1=0$ $x=\dfrac{1}{2} \qquad x=1$

b. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1}=\frac{40}{3}$

No.	Explicación	Operatoria
1	Se trabaja el término con exponente $x-1$, separandose en dos fracciones.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\left(\frac{3}{10}\right)^{x}\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}=\frac{40}{3}$
2	Se manipula el término con exponente -1, para que todas las fracciones tengan exponentes positivos.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\left(\frac{3}{10}\right)^{x}\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{40}{3}$
3	Agrupando todos los términos con el exponente x.	$\left(\frac{5}{3}\frac{3}{10}\right)^{x}\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{40}{3}$
4	Simplificando toda la ecuación.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{40}{3}*\frac{3}{10}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$
5	Aplicando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, para manipular el exponente x mediante propiedades de logaritmos y poder ser multiplicado.	$Ln\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=Ln(4)$ $x*Ln\left(\frac{1}{2}\right)=Ln(4)$
6	Despejando la variable x y calculando el resultado final.	$x=Ln(4)/Ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $x=-2$

Tema 4(20 puntos)

La vida media del $Paladio^{100}$ es de 4 días. Después de 20 días una muestra ha reducido su masa hasta 0.375 gramos.
a. ¿Cuál fue la masa inicial de la muestra?
b. Encuentre un modelo que exprese la cantidad de masa restante M después de t días.
c. ¿Cuál es la masa restante después de 3 dias?
d. ¿Después de cuántos días habrán únicamente 0.15 gramos?

No.	Explicación	Operatoria
1	Se plantean las condiciones iniciales del problema, con M_0 como la masa inicial.	$M(4) = \frac{M_0}{2}$ $M(20) = 0{,}375g$
2	Para determinar la masa inicial de la muestra, se recurre a plantear la función general de decaimiento exponencial.	$M(t) = M_0 * e^{kt}$
3	Con la función planteada, es necesario calcular el valor de la constante k y para esto se recurre a la condición inicial de la vida media y se sustituye.	$\frac{M_0}{2} = M_0 * e^{k(4)}$
4	Simplificando, se aplica logaritmo natural a ambos lados de la ecuación y se despeja para k.	$\frac{1}{2} = e^{k(4)}$ $Ln(1/2) = 4k$ $k = \frac{Ln(1/2)}{4}$

No.	Explicación	Operatoria
5	Con la constante encontrada, se procede a encontrar la vida media, mediante la segunda condición inicial $M(20) = 0{,}375$, sustituyendo los valores correspondientes.	$0{,}375 = M_0 * e^{\frac{Ln(1/2)}{4}(20)}$
6	Simplificando la expresión.	$0{,}375 = M_0 * e^{5*Ln(1/2)}$ $0{,}375 = M_0 * e^{Ln(1/2)^5}$ $0{,}375 = M_0 * (1/2)^5$
7	Despejando M_0.	$M_0 = 12$
8	Con todos los valores encontrados, el modelo $M(t)$ se expresa como.	$M(t) = 12e^{\frac{Ln(1/2)}{4}t}$
9	Para determinar la masa restante después de 3 días, se sustituye este valor en la función.	$M(3) = 12e^{\frac{Ln(1/2)}{4}(3)}$ $= 7.13\text{g}$