UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-2P-M-1S-00-2016-SE-07

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo semestre**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**29 de Septiembre**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Eduardo De Paz**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Eduardo De Paz**
COORDINADOR:	**Ing. Alfredo Gonzales**

Segundo examen parcial, Matutina

TEMARIO B

TEMA 1. (25 puntos)

Dado el polinomio

$$P(x) = 6x^5 - 23x^4 + 26x^3 - 31x^2 - 6x$$

a. Determine los posibles ceros racionales
b. Realice la tabla de descartes con los criterios
c. Determine las raíces reales del polinomio
d. Realizar la gráfica

TEMA 2. (15 puntos)

Dada la siguiente función trigonométrica:

$$y = -2 * Sen\left[3x + \frac{\pi}{2}\right] + 1$$

a. Determinar la amplitud
b. El periodo
c. Angulo de desplazamiento de fase
d. Realizar la gráfica

TEMA 3. (30 puntos)

Utilizando leyes de logaritmos resuelva las siguientes ecuaciones

a) $5\log_3 x - \log_3(x+2) = \log_3 x^3 + \log_3 1$
b) $3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = 0$
c) $\frac{Cos[x]}{1+Sen[x]} + \frac{1+Sen[x]}{Cos[x]} = 2 * \sec[x]$

TEMA 4. (30 puntos)

En laboratorio se están realizando estudios acerca de la cantidad de bacterias que se pueden contrarrestar con antibióticos al cabo de determinado tiempo. Se obtuvo una muestra que la primera medición fue a las tres horas teniendo presente 47 bacterias, al pasar 3 horas más decae la población a 22 bacterias. Por lo que se solicita su ayuda para determinar por método matemáticos lo siguiente:

a) Determine el número de bacterias al inicio en la muestra
b) Plante un modelo del decaimiento de las bacterias en función del tiempo
c) Determine el tiempo medio

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1. (25 puntos)

Dado el polinomio

$$P(x) = 6x^5 - 23x^4 + 26x^3 - 31x^2 - 6x$$

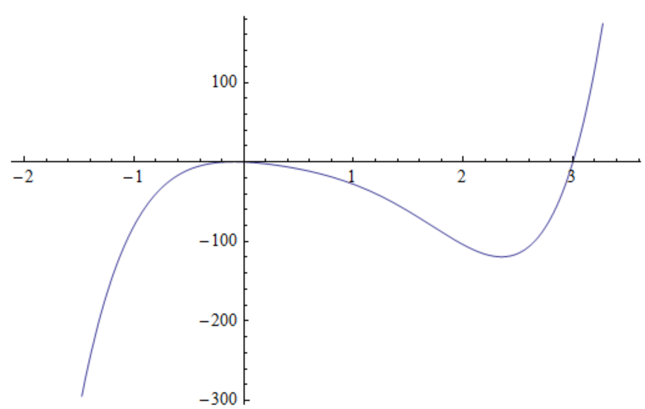
a. Determine los posibles ceros racionales
b. Realice la tabla de descartes con los criterios
c. Determine las raíces reales del polinomio
d. Realizar la gráfica

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Encontrar las raíces de un polinomio no es más que las intersecciones del mismo en el eje x de un plano cartesiano. Para determinar los diferentes ceros de un polinomio se realiza este procedimiento. Para esta expresión es notoria una factorización de la variable ya que está presente en todos los factores	$P(x) = 6x^5 - 23x^4 + 26x^3 - 31x^2 - 6x$ $P(x) = x(6x^4 - 23x^3 + 26x^2 - 31x - 6)$ $x = 0$
2.	Ya que sacamos factor común la cariable "x" el polinomio ha bajado un nivel, y a su vez queda de la forma estándar $Q(x) = a_n x^n - a_n x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$ Que es un polinomio cuyos exponentes van en orden decreciente hasta llegar al valor cero. Para las posibles raíces realiza mediante la división de los múltiplos de la constante que acompaña el primer término y el último	$Q(x) = 6x^4 - 23x^3 + 26x^2 - 31x - 6$ $a_n = 6$ $a_0 = 6$ $f_{an} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ $f_{a0} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

<table>
<tr>
<td>3.</td>
<td>La división de los múltiplos nos dará las posibles raíces del polinomio</td>
<td>$$x = \frac{f_{an}}{f_{a0}} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2},$$ $$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{6}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>Ya conociendo las posibles soluciones debemos de analizar cuantas soluciones positivas o negativas tiene el polinomio, esto se realiza mediante el teorema de descartes de los signos

El cual menciona que “el número de raíces positivas de Q(x) es iguala al número de variaciones de signo” y este polinomio tiene 3 variaciones.</td>
<td>$$Q(x) = 6x^4 - 23x^3 + 26x^2 - 31x - 6$$</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Y para las raíces negativas la regla dice que “el número de raíces negativas de Q(x) es igual al número de variaciones de signo cuando valuamos Q(-x)” y el polinomio tiene 1 variación,</td>
<td>$$Q(x) = 6x^4 - 23x^3 + 26x^2 - 31x - 6$$ $$Q(-x) = 6(-x)^4 - 23(-x)^3 + 26(-x)^2 - 31(-x) - 6$$ $$Q(-x) = 6x^4 + 23x^3 + 26x^2 + 31x - 6$$</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>Positivas</td><td>Negativas</td><td>C</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr>
</table>

Plot[x (6 x^4 - 23 x^3 + 26 x^2 - 31 x^1 - 6), {x, -2.0, 3.5}]



</td>
</tr>
</table>

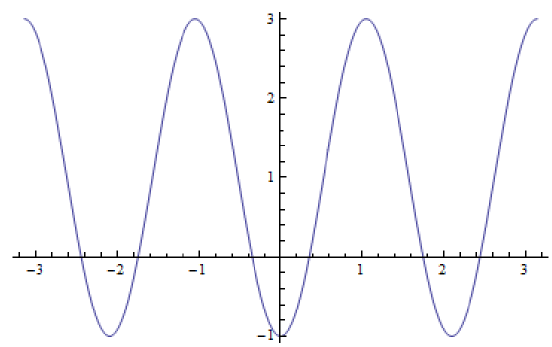
TEMA 2. (15 puntos)

Dada la siguiente función trigonométrica:

$$y = -2 * Sen\left[3x + \frac{\pi}{2}\right] + 1$$

a. Determinar la amplitud
b. El periodo
c. Angulo de desplazamiento de fase
d. Realizar la gráfica

No.	Explicación	Operatoria
1.	Teniendo la ecuación trigonométrica, observamos si es necesario hacerle arreglos a la expresión, para que quede en una estructura más clara, pero en esta expresión no es necesario	$y = -2 * Sen\left[3x + \frac{\pi}{2}\right] + 1$ $y = -2 * Sen\left[3(x + \frac{\pi}{6})\right] + 1$
2.	Ya que la tenemos de esa estructura, llevamos la función a la forma general de una ecuación de modelado armónico	Forma general $\mathrm{f(x) = a * Sen[wx + c] + b}$ $y = -2 * Sen\left[3x + \frac{\pi}{2}\right] + 1$
3.	Ya con la ecuación en su forma general, identificamos las constantes, para que sea más fácil determinar los valores.	$a{:}\ -2$ $w = 3$ $c = \frac{\pi}{2}$ $b = 1$
4.	**a) El periodo de la función**	El periodo de una función es: $T = \frac{2\pi}{w}$ $T = \frac{2\pi}{3}$ $T = \frac{2\pi}{3}$

5.	**b) La amplitud**	La amplitud de una función es: $$A = \lvert a \rvert$$ $$A = \lvert -2 \rvert$$ $$A = 2$$
6.	**c) El ángulo de cambio de fase**.	El ángulo de cambio de fase es: $$\varphi = c$$ $$\varphi = \frac{\pi}{2}$$
8.	Lo que podemos comprobar mediante la gráfica	`Plot[-2*Sin[3x + π/2] + 1, {x, -π, π}]` 
9.	Como apoyo y para revisar cual es el comportamiento y cómo influyen las variables en el movimiento armónico, pueden copiar este código en Wolfram y analizar los cambios	$\text{Animate}[\text{Plot}[a * \text{Sin}[w * x + c] + b, \{x, -2\pi, 2\pi\}], \{a, -2,2\}, \{w, -2,2\}, \{c, -\pi, \pi\}, \{b, 0,2\}]$

<u>TEMA 3.</u> **<u>(30 puntos)</u>**

Utilizando leyes de logaritmos, exponentes resuelva las siguientes ecuaciones y demuestre la última identidad trigonométrica

a) $5\log_3 x - \log_3(x+2) = \log_3 x^3 + \log_3 1$
b) $3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = 0$
c) $\frac{Cos[x]}{1+Sen[x]} + \frac{1+Sen[x]}{Cos[x]} = 2 * \sec[x]$

No.	Explicación	Operatoria
1.	En esta ecuación es necesario conocer las leyes de los logaritmos y saberlas aplicar en el momento correspondiente, para simplificar términos.	$5\log_3 x - \log_3(x+2) = \log_3 x^3 + \log_3 1$
2.	Lo primero que hacemos es llevar la expresión a la misma base logarítmica y evaluar cuya expresión no tenga variables, en este caso trabajaremos con logaritmo base 3.	$\log_3 x^5 - \log_3(x+2) = \log_3 x^3 + \cancel{\log_3 1}$ $\log_3 x^5 - \log_3(x+2) - \log_3 x^3 = 0$
3.	En este momento es donde empleamos las propiedades de los logaritmos las cuales son las siguientes:	$\log(a \cdot b) = loga + logb$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = loga - logb$ $\log_3 x^5 - \log_3(x+2) - \log_3 x^3 = 0$
4.	Podemos unir ambos términos ya que cuentan con la misma base.	$\log_3 x^5 - \log_3(x+2) - \log_3 x^3 = 0$ $\log_3 \frac{x^5}{x^3} - \log_3(x+2) = 0$
5.	Y por leyes de los exponentes en una división sabemos que se restan y aplicar de nuevo las leyes de resta de logaritmos.	$\log_3 x^2 - \log_3(x+2) = 0$ $\log_3 \frac{x^2}{x+2} = 0$
6.	Ya que tenemos una expresión elevamos ambos lados por su base para eliminar los logaritmos,	$3^{\log_3 \frac{x^2}{x+2}} = 3^0$

7.	Ya sin logaritmos podemos tratar la expresión como una ecuación cuadrática.	$\frac{x^2}{x+2} = 1$ $x^2 = 1(x+2)$
8.	Cuando resolvemos la ecuación encontramos dos valores que son solución, dichas respuestas es necesario evaluarlas en la ecuación original para ver si satisfacen la expresión Y como no existen logaritmos de un valor negativo, damos por descartada la segunda respuesta	$x^2 - x - 2 = 0$ $(x-2)(x+1) = 0$ $x = 2$ $x = -1$
R.	Para que se cumpla $5\log_3 x - \log_3(x+2) = \log_3 x^3 + \log_3 1$ La variable $x\ debe\ ser\ 2$	

b) $3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Tenemos una ecuación con exponentes la cual se puede resolver con diferentes métodos, sin embargo, es más sencillo por el método de sustitución	$3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = 0$
2.	El método de sustitución consta en sustituir la expresión de e^{x} por una variable, y por último regresar a la expresión original para determinar el valor de la variable	$3(e^{x})^2 - 8e^{x} - 3 = 0$
3.	Utilizaremos la variable u para la sustitución	$u = e^{x}$
4.	Sustituimos la variable, y nos queda como una ecuación cuadrática la cual podemos resolver	$3(u)^2 - 8u - 3 = 0$
5.	Y de forma factorizada nos queda como	$(u-3)\left(u+\frac{1}{3}\right) = 0$ $u = 3$ $u = -\frac{1}{3}$
6.	Luego regresamos a la sustitución establecida y despejamos la variable x y encontramos el valor.	$u = e^{x}$ $3 = e^{x}$ $Ln[3] = Ln[e^{x}]$ $Ln[3] = x$
7.	Y como un logaritmo no se puede evaluar un número negativo dejamos descartada esta respuesta	$u = e^{x}$ $-\frac{1}{3} = e^{x}$ $Ln[-\frac{1}{3}] = Ln[e^{x}]$
8.	Para que se cumpla $3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = 0$ La variable $x\ debe\ ser\ Ln[3]$	

d) $\frac{Cos[x]}{1+Sen[x]} + \frac{1+Sen[x]}{Cos[x]} = 2 * \sec[x]$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Esta expresión se solicita comprobar la igualdad por lo que solo trabajaremos con el lado izquierdo de la expresión para simplificarla.	$\frac{Cos[x]}{1 + Sen[x]} + \frac{1 + Sen[x]}{Cos[x]} = 2 * \sec[x]$
2.	Se realiza la sumatoria de dos fracciones, para la cual se hace el mínimo común múltiplo de los denominadores que no es más que la multiplicación de denominadores, y en el numerador la multiplicación cruzada	$\frac{Cos^2[x] + (1 + Sen[x])^2}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$
3.	Expandimos la expresión y haciendo uso de la identidad trigonométrica $Cos^2[x] + Sen[x]^2 = 1$ sustituimos valores	$\frac{Cos^2[x] + 1 + 2Sen[x]^1 + Sen[x]^2}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$ $\frac{Cos^2[x] + 1 + 2Sen[x]^1 + Sen[x]^2}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$ $\frac{1 + 2Sen[x]^1 + 1}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$ $\frac{2 + 2Sen[x]^1}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$
4.	Sacamos factor común en el numerador, para tener términos iguales y mayor simplificación	$\frac{2(1 + Sen[x]^1)}{(1 + Sen[x]) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$ $\frac{2(1 + \cancel{Sen[x]^1})}{(1 + \cancel{Sen[x]}) * Cos[x]} = 2 * \sec[x]$
5.	Ya eliminando nos queda ya solo una fracción la cual la podemos sustituir nuevamente por una sustitución trigonométrica, y queda comprobado que ambos términos son iguales	$\frac{2}{Cos[x]} = 2 * \sec[x]$ $2 * \sec[x] = 2 * \sec[x]$

<u>TEMA 4. (30 puntos)</u>

En laboratorio se están realizando estudios acerca de la cantidad de bacterias que se pueden contrarrestar con antibióticos al cabo de determinado tiempo. Se obtuvo una muestra que la primera medición fue a las tres horas teniendo presente 47 bacterias, al pasar 3 horas más decae la población a 22 bacterias. Por lo que se solicita su ayuda para determinar por método matemáticos lo siguiente:

d) Determine el número de bacterias al inicio en la muestra
e) Plante un modelo del decaimiento de las bacterias en función del tiempo
f) Determine el tiempo medio

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>La expresión matemática del decaimiento de una población está dada por esta expresión</td><td>$P(t) = P_o e^{-rt}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Nosotros conocemos dos coordenada de puntos según el comportamiento de las bacteria, las cuales se describen en la tabla, sin embargo no conocemos el número de bacterias que teníamos al inicio y tampoco el tiempo de vida media.</td><td>
<table>
<tr><th>Tiempo</th><th>Bacterias</th></tr>
<tr><td>0</td><td>X</td></tr>
<tr><td>3</td><td>47</td></tr>
<tr><td>6</td><td>22</td></tr>
<tr><td>$t_{1/2}$</td><td>x/2</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>Ya que tenemos estos datos podemos sustituir en la expresión inicial</td><td>$47 = P_o e^{-3r}$
$P_o = \frac{47}{e^{-3r}}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Pero como tenemos una sola ecuación y de incógnita tenemos la cantidad inicial y la constante r, es necesario un sistema de ecuaciones para ambas incógnitas, el cual lo generamos a partir del otro dato brindado</td><td>$22 = P_o e^{-6r}$
$P_o = \frac{22}{e^{-6r}}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Ya que tenemos las dos ecuaciones procedemos a resolverlas, del método igualando y despejando una incógnita para posteriormente evaliarla u tener ambas soluciones</td><td>$\frac{47}{e^{-3r}} = \frac{22}{e^{-6r}}$
$\frac{e^{-6r}}{e^{-3r}} = \frac{22}{47}$</td></tr>
</table>

		$e^{3r} = \frac{22}{47}$ $r = \frac{Ln\left(\frac{22}{47}\right)}{3}$ $r = 0.25304$
4.	Ahora sustituimos en una de las ecuaciones	$P_o = \frac{47}{e^{-3*0.25304}}$ $P_o = 100.41$
6.	Conociendo ambas incógnitas ya podemos conocer la expresión matemática, que modela el comportamiento de las bacterias.	$P(t) = 100 * e^{-0.25304*t}$

R./

$$P(t) = 100 * e^{-0.25304*t}$$